

# МЕХАНИКА. ГИДРОМЕХАНИКА

---

Орлова Е.Г.

К.Т.Н., доцент

# ГИДРОМЕХАНИКА

Является предшествующей дисциплинам:

---

«Судовые вспомогательные механизмы, системы и устройства»,  
«Судовые котельные и паропроизводящие установки»,  
«Судовые холодильные установки и системы кондиционирования воздуха», «Судовые двигатели внутреннего сгорания»,  
«Судовые турбомашины».

# Планируемые результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК – 2 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, аналитические методы в профессиональной деятельности.	ОПК-2.1. Знает основные законы естественнонаучных дисциплин, связанные с профессиональной деятельностью;	<b>Знать</b> основные законы гидромеханики
	ОПК-2.2. Умеет применять основные законы естественнонаучных дисциплин, связанные с профессиональной деятельностью;	<b>Уметь</b> применять основные законы гидромеханики
	ОПК-2.3. Владеет навыками применения основных законов естественнонаучных дисциплин, связанные с профессиональной деятельностью;	<b>Владеть</b> навыками применения основных законов гидромеханики

# Планируемые результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК – 3 Способен проводить измерения, наблюдения, обрабатывать и представлять экспериментальные данные	ОПК-3.1. Знает способы измерений, записи и хранения результатов наблюдений, методы обработки и представления экспериментальных данных гидромеханических процессов;	<b>Знать</b> способы измерения давления, скорости и расхода жидкости, методы теории подобия, обработки и представления экспериментальных данных
	ОПК-3.2. Умеет обрабатывать экспериментальные данные, интерпретировать и профессионально представлять полученные результаты;	<b>Уметь</b> измерять характеристики потока, обрабатывать и анализировать результаты эксперимента
	ОПК-3.3. Владеет навыками работы с измерительными приборами и инструментами;	<b>Владеть</b> навыками измерения расхода, скорости и давления потока; обработки и обобщения экспериментальных данных



# Глава 1.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### *1.1. Предмет гидромеханики. Модель сплошной среды*

---

Гидромеханика изучает законы равновесия и движения жидкостей и газов, и их взаимодействие с поверхностями твердых тел.

Гидромеханика разделяется на статику (гидростатику), кинематику и динамику.

## Модель сплошной среды

Жидкости и газы рассматриваются как *сплошная среда*, которой приписываются *физические свойства*, феноменологически отражающие их молекулярную структуру.

### Основные положения модели:

- Любой малый макроскопический объём имеет *такие же свойства*, что и объём сравнительно больших размеров
- Все физические свойства жидкостей и газов считаются *непрерывными функциями* координат и времени
- Производные от этих функций также являются *непрерывными функциями* координат и времени.



## Модель сплошной среды

*Эти допущения корректны:*

- если размеры рассматриваемой области жидкости или газа *велики* по сравнению с размерами молекул и длиной их свободного пробега;
- если количество молекул в рассматриваемом объёме достаточно, чтобы физические свойства можно было считать непрерывными (газ *не разреженный*).

## Элементарный объём

**Элементарный объём** - это объём, размеры которого много больше размеров молекул и расстояний их свободного пробега, но много меньше размеров рассматриваемого объёма жидкости.

В дальнейшем под термином «*частица*» жидкости или газа будем понимать именно *элементарный объём*.



## 1.2. Физические свойства жидкостей и газов

- **Сплошность** – жидкости и газы движутся без образования разрывов и пустот
- **Текучесть** - способность совершать непрерывное, неограниченное движение в пространстве и времени под действием приложенных сил или по инерции.

Молекулам жидкости, как и молекулам газа, кроме колебательного движения около некоторого стационарного положения свойственно эпизодическое скачкообразное перемещение в новые положения - самодиффузия молекул. Это одна из причин текучести жидкости. Приложенная к жидкости сдвигающая сила приводит к преимущественной направленности скачкообразных перемещений молекул в сторону действия силы.

## **Физические свойства жидкостей и газов**

Под действием сдвигающей силы происходит деформация объёма.

Деформация объёма жидкости, вызванная постоянной сдвигающей силой, непрерывно возрастает так, что даже сравнительно небольшие силы могут вызвать большие деформации. Дополнительной особенностью газов является то, что их частицы не связаны молекулярными силами притяжения.

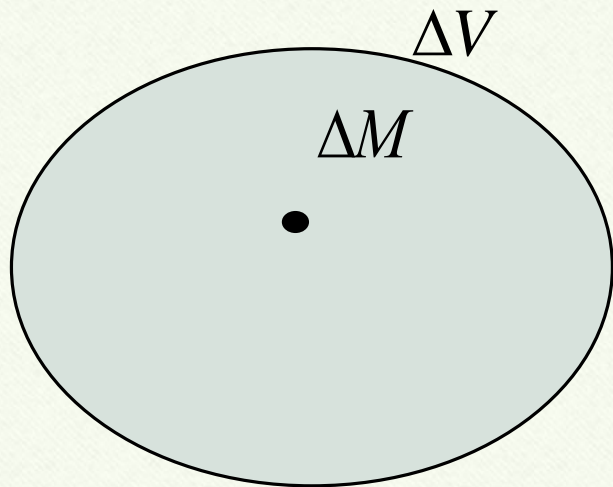
### Следствия:

1. Жидкости и газы *не имеют собственной формы* и принимают форму сосуда, в который они помещены.
2. Газ занимает *весь предоставленный ему объём*.



## Физические свойства жидкостей и газов

- **Плотность** – масса единицы объёма вещества,  $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
- **Удельный объём** – объём, занимаемый 1 кг вещества, ( $\nu, \text{м}^3/\text{кг}$ ).



$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad \nu = \frac{\Delta V}{\Delta M} \quad \boxed{\nu = \frac{1}{\rho}}$$

Под плотностью жидкости в данной точке понимается :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad \nu = \nu(t, x, y, z)$$



## Физические свойства жидкостей и газов

- *тепловое расширение* – способность жидкостей и газов изменять свою плотность (удельный объём) при изменении температуры

Характеризуется коэффициентом теплового расширения  $\beta_t$ ,  $K^{-1}$  :

$$\beta_t = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p ; \quad (1) \quad \beta_t = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Он равен относительному изменению плотности (удельного объёма) при изменении температуры на один Кельвин (К) при постоянном давлении.

## Тепловое расширение

Проинтегрируем выражение (1) :

$$\int_T \beta_t \partial T = - \int_{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}; \quad \longrightarrow \quad \beta_t \Delta T \Big|_{T_0}^{T_1} = - \ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho_1} \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} = \beta_t (T_1 - T_0)$$
$$\longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_0 e^{-\beta_t \Delta T}$$

Если плотность меняется незначительно, можно использовать упрощённые формулы:

$$\beta_t = - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right)_p; \quad \beta_t = \frac{1}{\nu_0} \left( \frac{\Delta \nu}{\Delta T} \right)_p; \quad \longrightarrow$$

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - \beta_t \Delta T)$$

$$\nu_1 = \nu_0 (1 + \beta_t \Delta T)$$



## Физические свойства жидкостей и газов

- **Объёмное сжатие**— способность жидкостей и газов изменять свою плотность (удельный объём) при изменении давления.

Характеризуется коэффициентом объёмного сжатия  $\beta_p$ , Па<sup>-1</sup> :

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t \quad (2) \quad \beta_p = -\frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \nu}{\partial p} \right)_t.$$

Он равен относительному изменению плотности (удельного объёма) при изменении давления на один Паскаль при постоянной температуре.



## Объёмное сжатие (сжимаемость)

Проинтегрируем выражение (2) :

$$\int_p \beta_p \partial p = \int_{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}; \quad \longrightarrow \quad \beta_p \Delta p \Big|_{p_0}^{p_1} = \ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho_1} \quad \longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_0 e^{\beta_p \Delta p}$$

Если плотность меняется незначительно, можно использовать упрощённые формулы:

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta p} \right)_{T=\text{const}}; \quad \beta_p = -\frac{1}{\nu_0} \left( \frac{\Delta \nu}{\Delta p} \right)_{T=\text{const}}; \quad \longrightarrow$$

$$\rho_1 = \rho_0 (1 + \beta_p \Delta p)$$

$$\nu_1 = \nu_0 (1 - \beta_p \Delta p)$$

## **Физические свойства жидкостей и газов**

### ***Объёмное сжатие (сжимаемость)***

Обратная коэффициенту  $\beta_p$  величина называется *модулем объёмной упругости*  $E$ , Па.

Для воды при атмосферном давлении модуль  $E$  составляет приблизительно 2000 МПа. Такого же порядка он и для других капельных жидкостей, например, для минеральных масел он равен приблизительно 1200 МПа.

Поэтому для многих задач сжимаемостью жидкостей можно пренебречь.



## **Физические свойства жидкостей и газов**

**Вязкость** – способность жидкостей и газов к возникновению сил трения между слоями, движущимися с разной скоростью (или способность оказывать сопротивление относительному смещению слоев).

Вязкость – свойство *обратное текучести*. Чем больше вязкость, тем хуже текучесть.

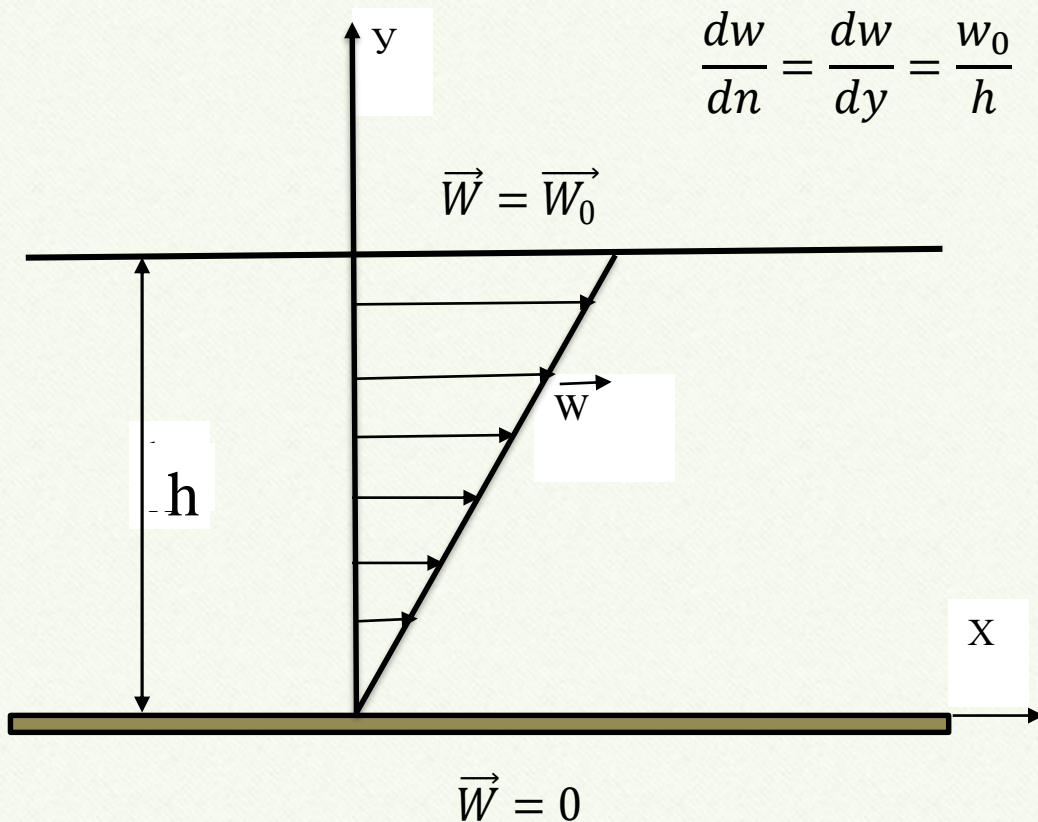
Сила внутреннего трения  $F$  между смещающимися слоями выражается формулой Ньютона:

$$F = \mu \int \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

где  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости,  $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}) = \text{Па} \cdot \text{с}$ ,



# Вязкость



$$\frac{dw}{dn} = \frac{dw}{dy} = \frac{w_0}{h}$$

При прямолинейном слоистом движении формула Ньютона упрощается, т.к.  $\frac{\partial w}{\partial n} = \text{const.}$

Сила внутреннего трения  $F$  между смещающимися слоями  $F = \pm \mu S \frac{\partial w}{\partial n}$ ,

Касательные напряжения:

$$\vec{\tau} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S} = \pm \mu \frac{dw}{dn}$$

## Вязкость

$\mu$  - динамический коэффициент вязкости,  $\left[ \frac{(Н \cdot с)}{м^2} = \frac{кг}{(м \cdot с)} = Па \cdot с \right]$

$\nu = \mu / \rho$  - кинематический коэффициент вязкости,  $м^2/с$  или  $мм^2/с$

(сантистокс).

	СГС	СИ
$\mu$	$\left[ \frac{дин}{(см^2)} \cdot с = 1 Пуаз \right]$	1 Пуаз = 0,1 Па · с
$\nu$	1 $см^2/с = 1$ Стокс	1 Ст = $10^{-4} м^2/с$ 1 сСт = $10^{-6} м^2/с$

## **Условная вязкость жидкости**

Условная вязкость жидкости (ВУ) измеряется в градусах Энглера, °Е.  
Условная вязкость - отношение времени истечения испытуемой жидкости  $\Delta\tau$  из объёма  $V=200$  мл через калиброванное отверстие диаметром  $d=6,2$  мм ко времени истечения в тех же условиях пресной воды  $\Delta\tau_{\text{в}}$  при температуре  $t = 20$  °С ( $\text{ВУ}=\Delta\tau/ \Delta\tau_{\text{в}}$ ).

$$\nu = \left( 0.073\text{ВУ} - \frac{0.063}{\text{ВУ}} \right) \cdot 10^{-4}, \text{ м}^2/\text{с}$$

**У жидкостей вязкость понижается при нагреве, а у газов - повышается.**



# ***Идеальная жидкость***

В гидромеханике *идеальной* называется *невязкая и несжимаемая жидкость* ( $\rho = \text{const}$ ).

Идеальных жидкостей не существует, но в некоторых случаях этими свойствами можно пренебречь.

## **Физические свойства жидкостей и газов**

### ***Поверхностное натяжение***

Жидкость, в отличие от газов, не заполняет весь объем сосуда, в который она налита. Между жидкостью и газом (или паром) образуется граница раздела, называемая ***свободной поверхностью жидкости***.

Любая система, предоставленная сама себе, стремится перейти в состояние, в котором ее потенциальная энергия минимальна. Отсюда следует, что ***свободная поверхность жидкости стремится сократить свою площадь***.



## ***Поверхностное натяжение***

Для увеличения площади свободной поверхности) необходимо совершить работу, равную изменению поверхностной энергии:

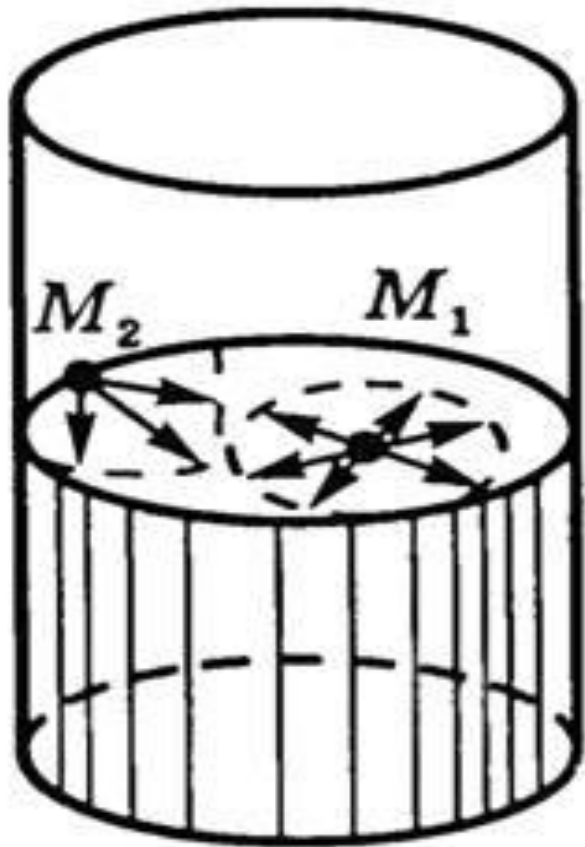
$$\Delta A_{\text{внеш}} = \sigma \Delta S.$$

$\sigma$  (Дж/м<sup>2</sup>) называется коэффициентом ***поверхностного натяжения*** ( $\sigma > 0$ ).

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения равен работе, необходимой для увеличения площади поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.



## Поверхностное натяжение

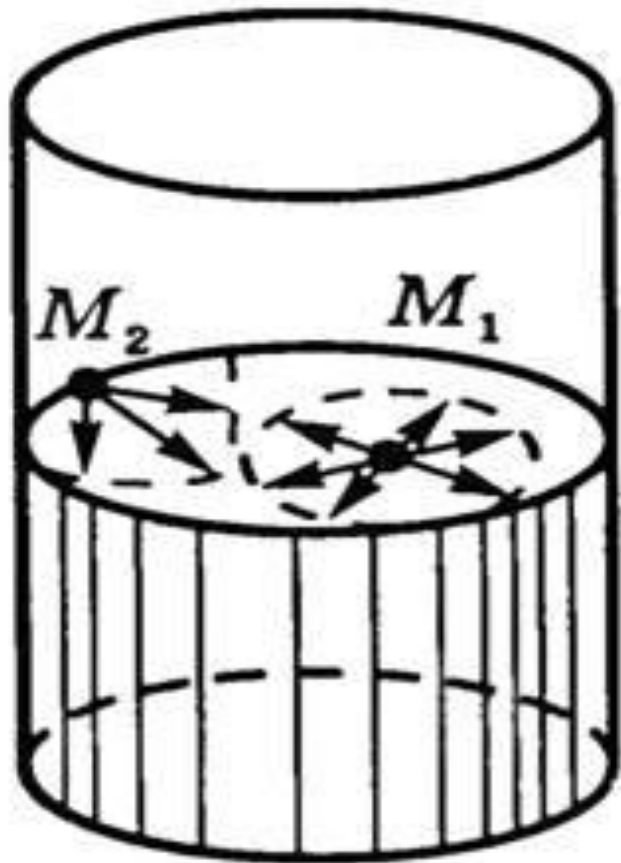


Молекулы жидкости, находящиеся в тонкой плёнке, образующей свободную поверхность, находятся в неодинаковых условиях.

Поверхностные молекулы взаимодействуют между собой.

Для молекулы  $M_1$  равнодействующая молекулярных сил, направленных вдоль свободной поверхности жидкости, равна нулю, а для молекулы  $M_2$ , расположенной у границы поверхности жидкости, эта равнодействующая не равна нулю и направлена по нормали к границе свободной поверхности в данной точке и по касательной к самой поверхности жидкости.

## Поверхностное натяжение



Равнодействующая сил, действующих на все молекулы, находящиеся на границе свободной поверхности, и есть сила *поверхностного натяжения*. В целом она действует так, что стремится сократить поверхность жидкости.

Сила поверхностного натяжения  $F$  прямо пропорциональна длине  $l$  границы поверхностного слоя жидкости:  $F = \sigma \cdot l$ .

**Поверхностное натяжение – специфическое свойство жидкостей, отличающее их от газов.**



## **Физические свойства жидкостей и газов**

### ***Смачивание***

На границе между твёрдым телом и жидкостью возникают силы взаимодействия между молекулами жидкости и твёрдого тела, вследствие чего частицы жидкости прилипают к твердой поверхности. Если силы притяжения *между молекулами жидкости* оказываются *больше*, чем между молекулами жидкости и твёрдого тела, то жидкость называют *несмачивающей* это тело. Если силы притяжения *между молекулами жидкости и твёрдого тела* оказываются *больше*, чем между молекулами самой жидкости, то жидкость называют *смачивающей*.



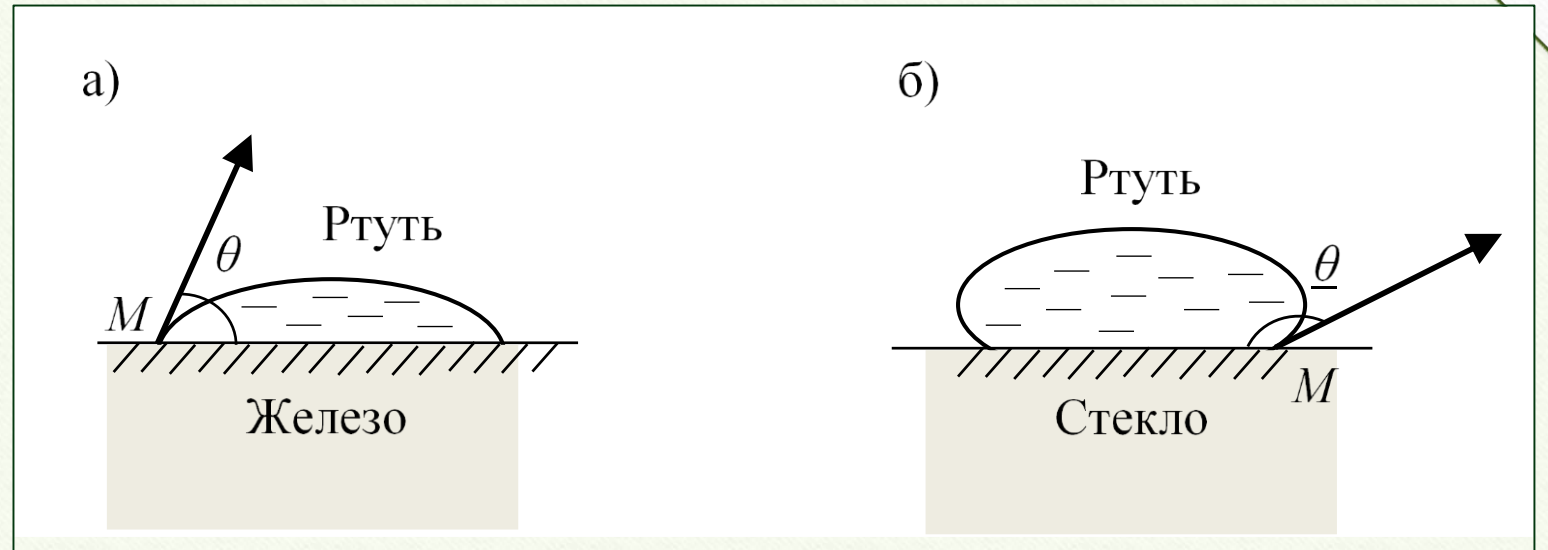
## Смачивание

### Смачивающая

жидкость прилегает к поверхности твердого тела под некоторым **острым** углом  $\theta$ .

### Несмачивающая

жидкость прилегает к поверхности твердого тела под некоторым **тупым** краевым углом  $\theta$ .



*а* — жидкость, смачивающая поверхность;

*б* — жидкость, не смачивающая

поверхность

# Физические свойства жидкостей и газов

## Испарение

**Испарение** — процесс перехода жидкости в газообразное состояние. Оно заключается в отрыве молекул жидкости от свободной поверхности и распространении их в окружающем пространстве.

Если объём этого пространства достаточно велик, испарение продолжается до исчезновения жидкости.

Если объём недостаточно велик, испарение продолжается до наступления динамического равновесия, когда число испаряющихся и конденсирующихся за некоторое время молекул выравнивается. При этом в окружающем пространстве над поверхностью жидкости устанавливается соответствующее парциальное давление *насыщенного пара*. Величина этого давления *зависит от температуры*.



# Физические свойства жидкостей и газов

## *Кипение*

**Кипение** — процесс образования и роста пузырьков пара внутри жидкости с последующим прорывом этих пузырьков сквозь свободную поверхность в окружающую среду. Таким образом, при кипении испарение происходит не только со свободной поверхности, но и внутри пузырьков.

Кипение обеспечивается более или менее интенсивным *подводом теплоты* к жидкости и, в отличие от испарения, происходит при *температуре насыщения*, соответствующей давлению пара над свободной поверхностью жидкости.



## **Физические свойства жидкостей и газов**

### ***Кавитация***

В задачах гидромеханики особый интерес представляет специфический случай кипения, называемый *кавитацией*, когда в движущейся жидкости вследствие местных *понижений давления до давления насыщения* происходит *кипение только в этих местах*.

Кавитация может проявляться как в виде появления отдельных пузырьков, так и в виде сплошных, заполненных парами жидкости полостей, присоединенных к поверхности обтекаемых тел.

## *Кавитация*

**Проблемами**, возникающими в связи с кавитацией, являются изменение закономерностей течения жидкости в связи с нарушением сплошности, а также *кавитационные разрушения* материала твердых стенок *при схлопывании пузырей* вблизи границ течения. Некоторые гидродинамические устройства (например, некоторые типы измерителей расхода жидкости) *перестают выполнять свое назначение при появлении кавитации*. Кавитационные разрушения лопастей гидравлических турбин, насосов, гребных винтов представляют собой одну из важных технических проблем.



# **Физические свойства жидкостей и газов**

## ***Растворение газов***

**Растворение газов в жидкостях** — процесс проникновения молекул газа из окружающей среды через свободную поверхность внутрь жидкости.

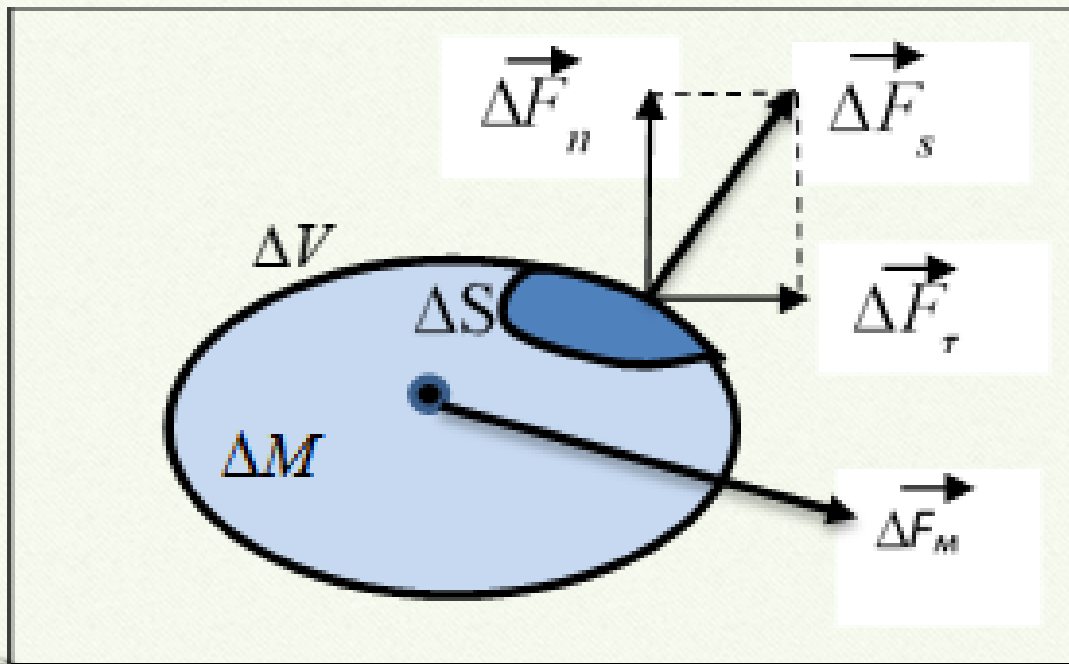
Процесс растворения продолжается до такого состояния, при котором *количество растворяющегося и выделяющегося газа выравнивается.*

**Растворимость газов в жидкостях** характеризуется *количеством растворенного газа в единице объёма жидкости*, оно может быть различным для разных жидкостей и изменяться в зависимости от давления.

### 1.3. Силы, действующие на жидкости и газы

**Массовыми** называются силы, приложенные ко всем частицам среды, заполняющей некоторый объём.

К ним относятся, например, сила тяжести и силы инерции.



Массовые силы характеризуются *вектором плотности распределения массовых сил* (вектором интенсивности):

$$\vec{f}_m = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\Delta M} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\Delta V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}_m}{dV}$$



# Массовые силы

**Вектор плотности распределения массовых сил** – это сила, действующая на единицу массы жидкости или газа.

Например, если на рассматриваемый объём действует сила тяжести:

$$\vec{f}_g = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_g}{\Delta M} = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\Delta M \cdot \vec{g}}{\Delta M} = \vec{g}$$

Если известна величина вектора плотности распределения массовых сил, то легко определить массовую силу, действующую на выделенный объём:

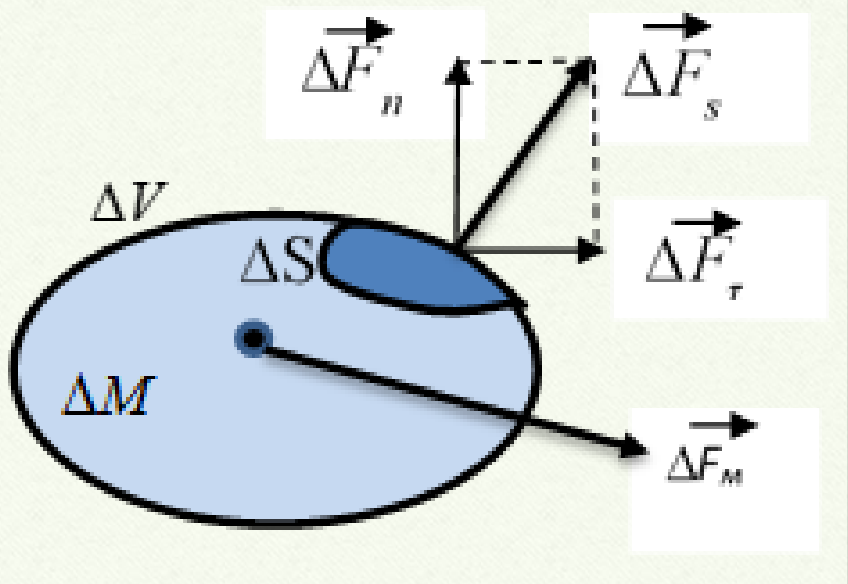
$$F = \int (f \cdot \rho \cdot dV)$$

## Поверхностные силы

В случаях, когда частицы жидкости, на которые действуют силы, расположены в столь тонком слое, что его можно свести к материальной поверхности, такие силы называются *поверхностными* (силы трения, давления, поверхностного натяжения).



## Поверхностные силы



Поверхностные силы  
характеризуются  
*напряжением.*

Касательное напряжение:  $\vec{\tau} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\tau}{\Delta S}$

Нормальное напряжение:  $\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta S}$ .

Нормальные напряжения в механике  
называются **давлением.**

*Напряжение – это сила, действующая на единицу  
поверхности.*

## **Силы, действующие на жидкость**

Основное различие между вектором плотности распределения массовых сил  $f$  и напряжениями заключается в том, что вектор  $f$  является *однозначной* функцией координат и времени, т.е. *образует векторное поле*, тогда как направление векторов напряжения в выбранной точке зависит от ориентации площадки  $\Delta S$ , к которой приложено напряжение, и потому их направление *не определено однозначно* в каждой точке, следовательно, они *векторного поля не образуют*.



## Силы, действующие на жидкость

Нормальные (по отношению к площадке  $\Delta S$ ) и касательные напряжения можно представить в виде:

$$\vec{p} = p \cdot \vec{n} \qquad \vec{\tau} = \tau \cdot \vec{\zeta}$$

где  $\vec{n}$  и  $\vec{\zeta}$  - орты нормали и касательной к площадке  $\Delta S$  соответственно.

Скалярные величины  $p$  и  $\tau$  не зависят от положения площадки  $\Delta S$  и образуют скалярные поля.

## **Контрольные вопросы**

1. Что такое средняя плотность?
2. Что такое вязкость?
3. Какими коэффициентами оценивается вязкость и как они между собой связаны?
4. Зачем подогревают нефтепродукты?
5. Какими коэффициентами оценивается вязкость и как они связаны между собой?
6. Какая жидкость называется идеальной?
7. Какие виды сил действуют в жидкости?
8. Что такое вектор плотности распределения массовых сил?
9. Что такое напряжение?



## Глава 2.

# ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика изучает равновесие жидкостей и газов, находящихся в состоянии покоя.


**Состояние покоя** – это такое состояние, когда частицы среды не перемещаются относительно друг друга.

Если жидкость находится *в состоянии покоя* в сосуде, который *не перемещается* относительно поверхности земли, то такое равновесие называется **абсолютным**.

# ГИДРОСТАТИКА

Если сосуд вместе с находящейся в ней жидкостью *перемещается* относительно земли, но при этом частицы жидкости *не перемещаются относительно друг друга* и относительно стенок сосуда, такой покой называется **относительным**.

В покоящейся жидкости не происходит относительного перемещения слоев, следовательно (по гипотезе Ньютона), в ней *отсутствуют касательные напряжения*.

$$\vec{\tau} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S} = \pm \mu \frac{dw}{dn}$$




## **2.1. Гидростатическое давление и его свойства**

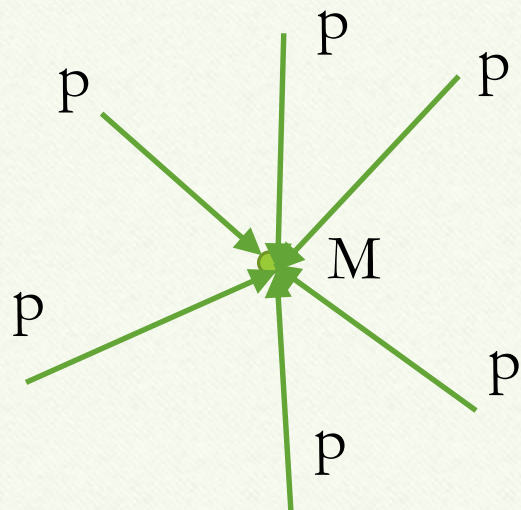
Нормальные напряжения в покоящейся жидкости называются гидростатическим давлением.

### **Свойства гидростатического давления:**

- Давление всегда направлено по нормали к площадке, на которую оно действует;
- Давление всегда стремится сжать выделенный объём;
- Величина гидростатического давления в данной точке жидкости со всех сторон одинакова.

## Свойства гидростатического давления:

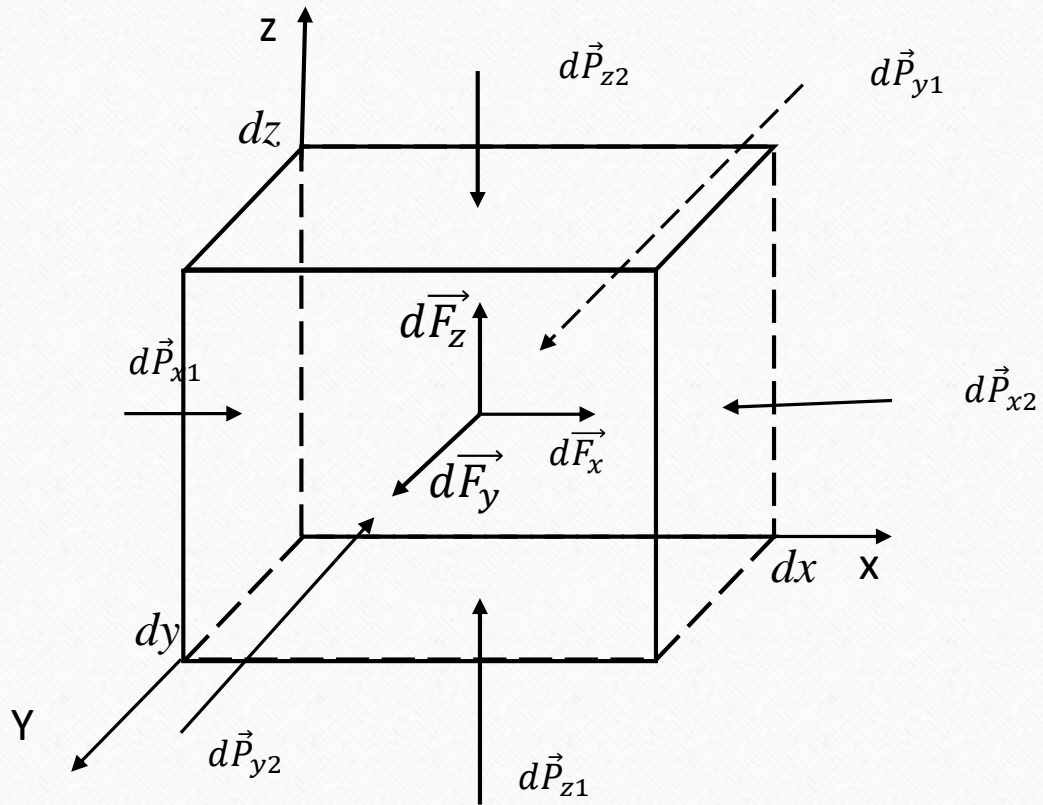
- Величина гидростатического давления в данной точке жидкости со всех сторон одинакова.





## 2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).

Уравнения Эйлера выражают 1-й закон Ньютона применительно к жидкостям и газам



$$p = p(x, y, z)$$

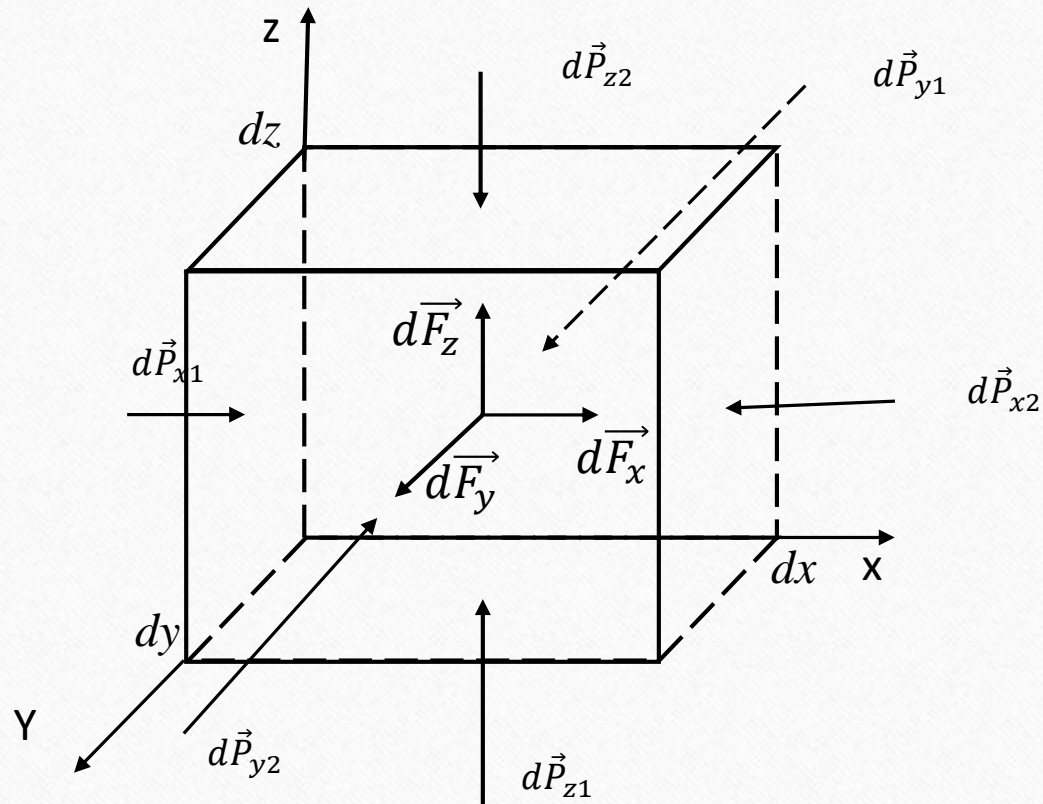
Пусть, давление в центре параллелепипеда равно  $p$ .  
Тогда, давление на левой грани будет:

$$p_{x1} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$$

Давление на правой грани будет:

$$p_{x2} = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$$

## Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)



Силы давления на левую и правую грани:

$$d\vec{P}_{x1} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dydz$$

$$d\vec{P}_{x2} = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dydz$$

Проекция массовой силы на ось x:

$$dF_x = f_x \rho \cdot dx dy dz$$

где  $f_x$  - проекция вектора плотности распределения массовых сил на ось x



Уравнения Эйлера выражают 1-й закон Ньютона применительно к жидкостям и газам.

Условие равновесия выделенного объема жидкости в проекции

на ось  $x$  :  $dF_x - d\vec{P}_{x1} + d\vec{P}_{x2} = 0$

$$\left(p - \frac{\partial p}{2} - p - \frac{\partial p}{2}\right)dydz + \rho f_x dx dy dz = 0$$

$$- \partial p dy dz + \rho f_x dx dy dz = 0$$



$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Аналогично:  $f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

## Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{f} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\vec{f} = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}$$

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k}$$



## 2.3. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим частный случай равновесия жидкости, когда из массовых сил на неё действует только сила тяжести. Ось  $z$  направим вертикально вниз. Тогда  $f_x = f_y = 0$ ,  $f_z = g$

В этом случае уравнения Эйлера упрощаются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow p = \text{const}(x) \\ \longrightarrow p = \text{const}(y) \end{array}$$

*В покоящейся жидкости давление меняется только по вертикали, т.е. в любом горизонтальном слое жидкости давление во всех точках одинаково*

# Основное уравнение гидростатики

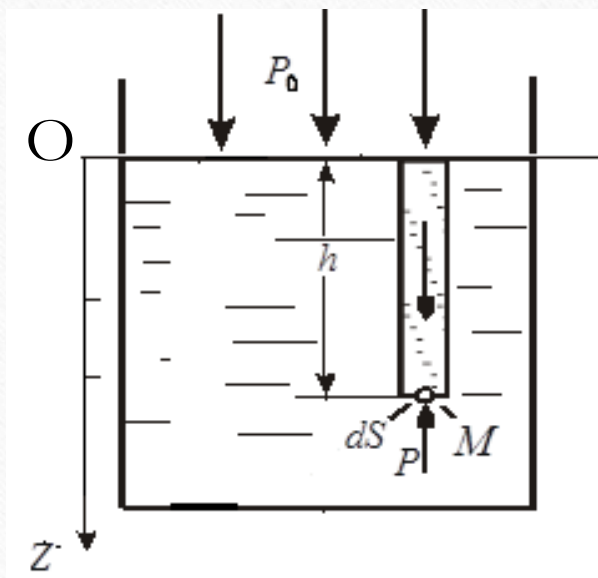
Интегрируя третье уравнение системы, получим:

$$p = \rho g z + C.$$

Граничные условия:

при  $z=0$

$$p = p_0 \longrightarrow C = p_0.$$



$$p = p_0 + \rho g z$$

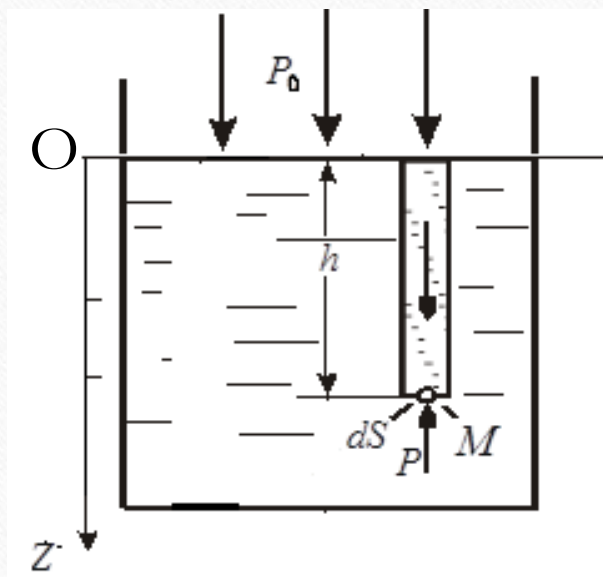
ИЛИ

$$p = p_0 + \rho g h$$



## Основное уравнение гидростатики

$$p = p_0 + \rho g h$$



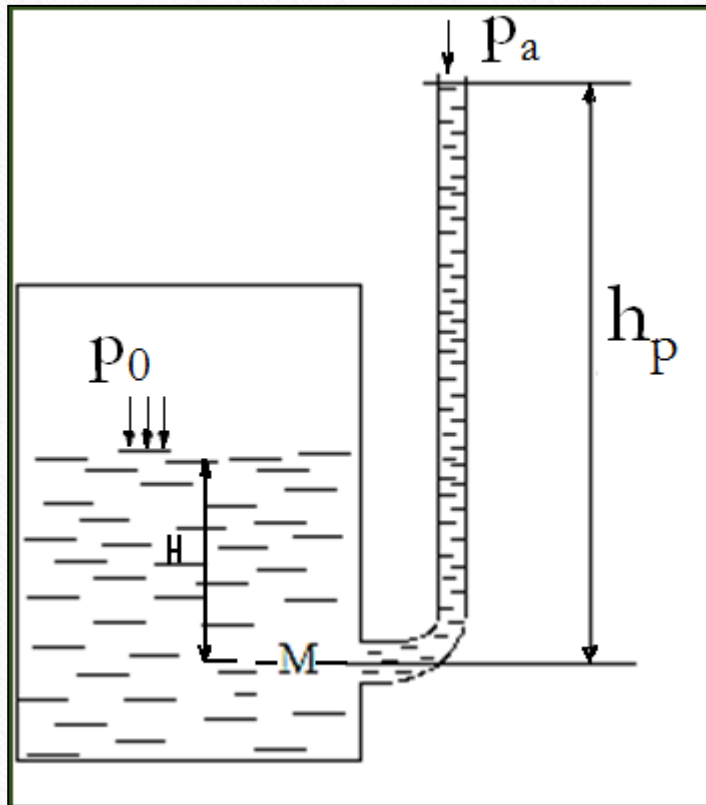
### Следствие

**Закон Паскаля:** *давление, приложенное к свободной поверхности жидкости  $p_0$ , одинаково передается всем точкам жидкости по всем направлениям*

Величина  $p - p_0 = p_u = \rho g h$  называется манометрическим, или *избыточным* давлением.

## 2.4. Способы измерения давления и вакуума

### 1. Пьезометр



$$p_M = p_0 + \rho g H \quad p_M = p_a + \rho g h_p$$

$$h_p = \frac{p_M - p_a}{\rho g} = \frac{p_u}{\rho g}$$

$$p_0 + \rho g H = p_a + \rho g h_p$$

$$p_0 = p_a + \rho g (h_p - H)$$

где  $p_u$  - избыточное давление на уровне присоединения пьезометра



# Способы измерения давления и вакуума

## 1. Пьезометр

$$h_p = \frac{P_M - P_a}{\rho g} = \frac{P_u}{\rho g} \quad \text{- пьезометрическая высота}$$

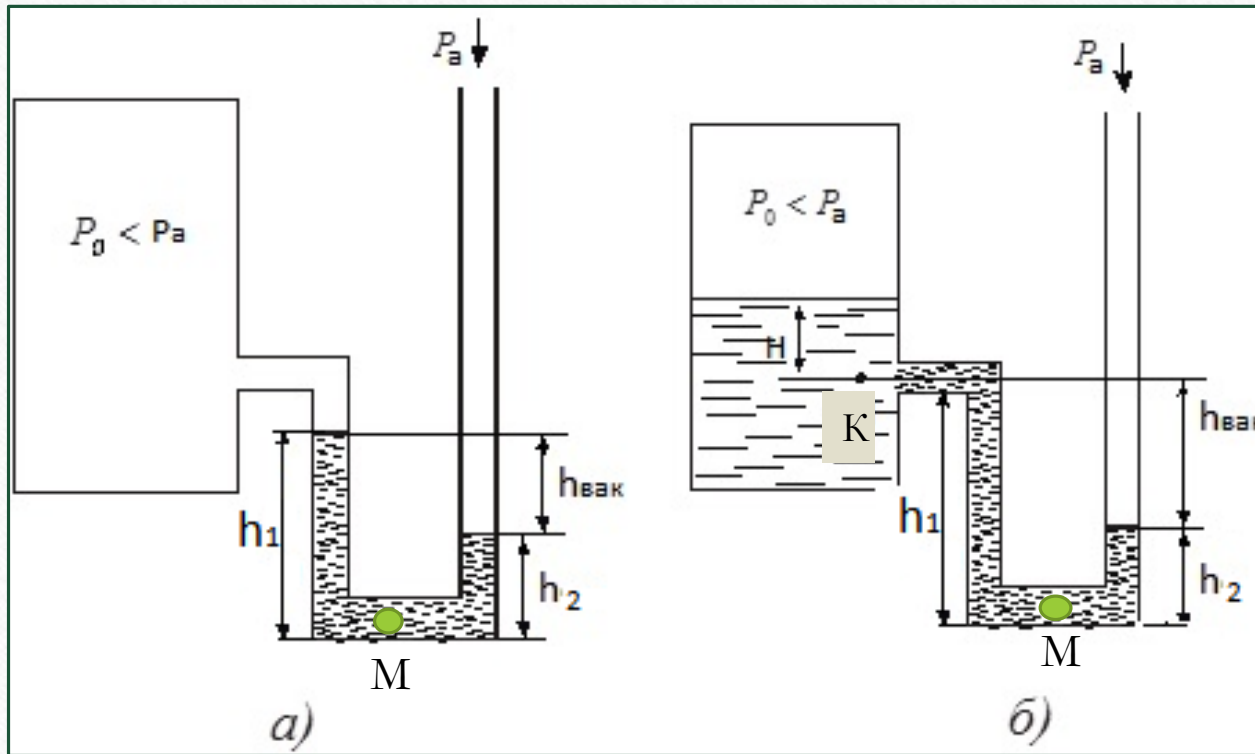
Избыточному давлению в  $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$  соответствует пьезометрическая высота:

$$h_1 = \frac{p}{g \rho_{H_2O}} = \frac{10^5}{9,81 \cdot 1000} = 10,2 \quad \text{м водяного столба};$$

$$h_2 = \frac{p}{g \rho_{Hg}} = \frac{10^5}{9,81 \cdot 13595,1} = 750,1 \quad \text{мм ртутного столба};$$

# Способы измерения давления и вакуума

## 2. Вакуумметры



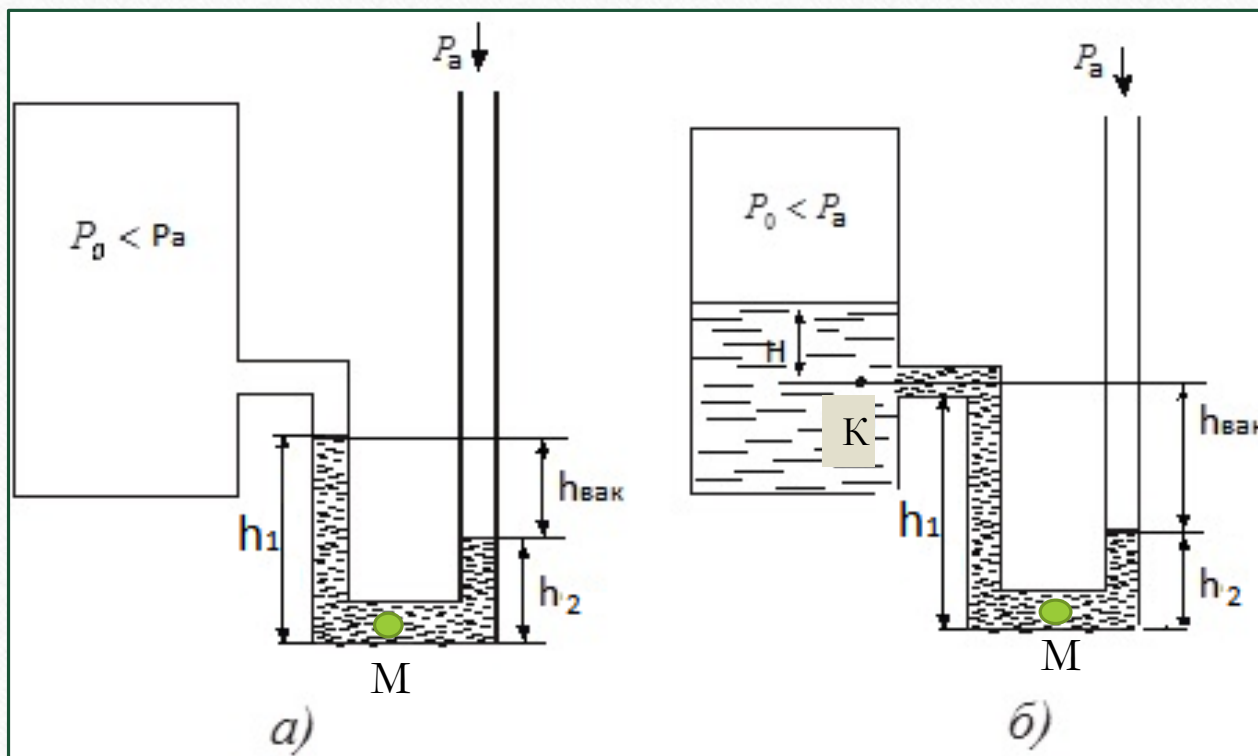
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P_M &= P_a + \rho g h_2 \\ P_M &= P_0 + \rho g h_1 \\ P_a + \rho g h_2 &= P_0 + \rho g h_1 \\ h_{\text{вак}} &= \frac{P_a - P_0}{\rho g} \end{aligned}$$

где  $h_{\text{вак}}$  — вакуумметрическая высота



# Способы измерения давления и вакуума

## 2. Вакуумметры

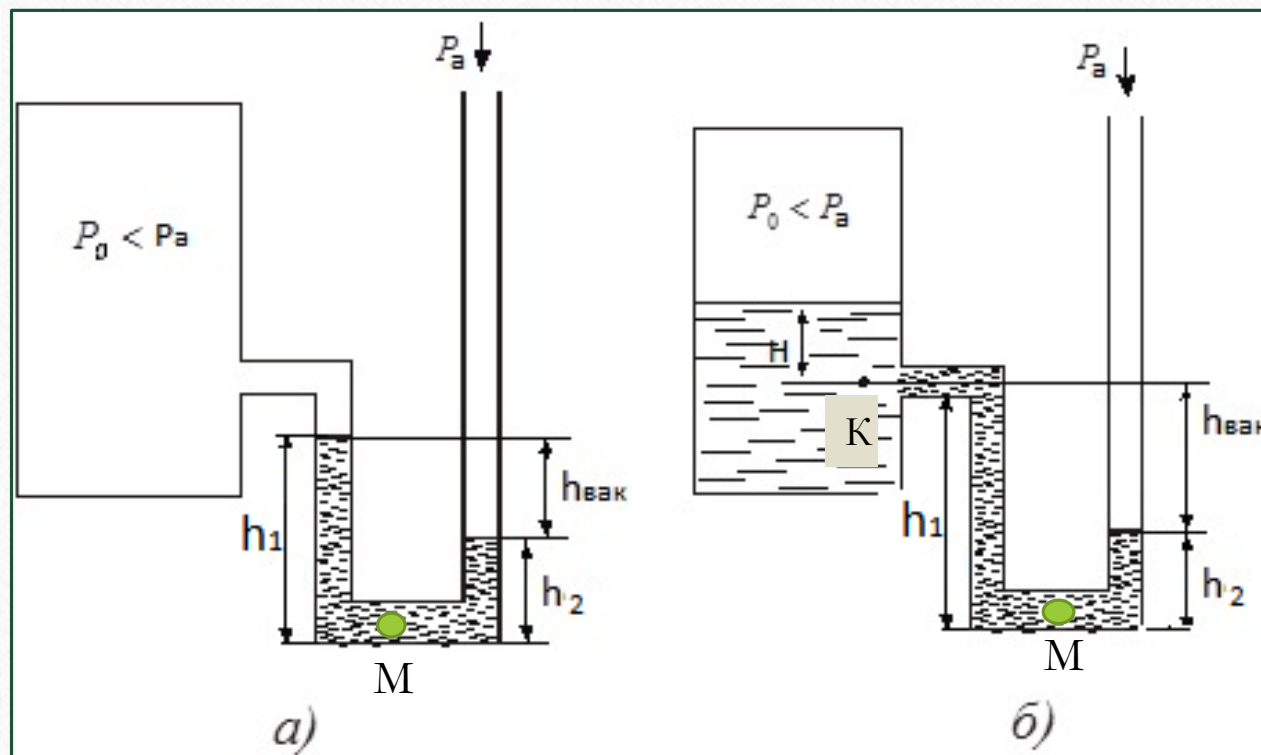


$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & p_m = p_a + \rho g h_2 \\ & p_m = p_0 + \rho g h_1 + \rho g H \\ & p_a + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1 + \rho g H \\ & p_a - p_0 = \rho g (h_{\text{вак}} + H) \end{aligned}$$

где  $h_{\text{вак}}$  — вакуумметрическая высота

# Способы измерения давления и вакуума

## 2. Вакуумметры



б)

Разрежение на уровне  
присоединения  
вакуумметра:

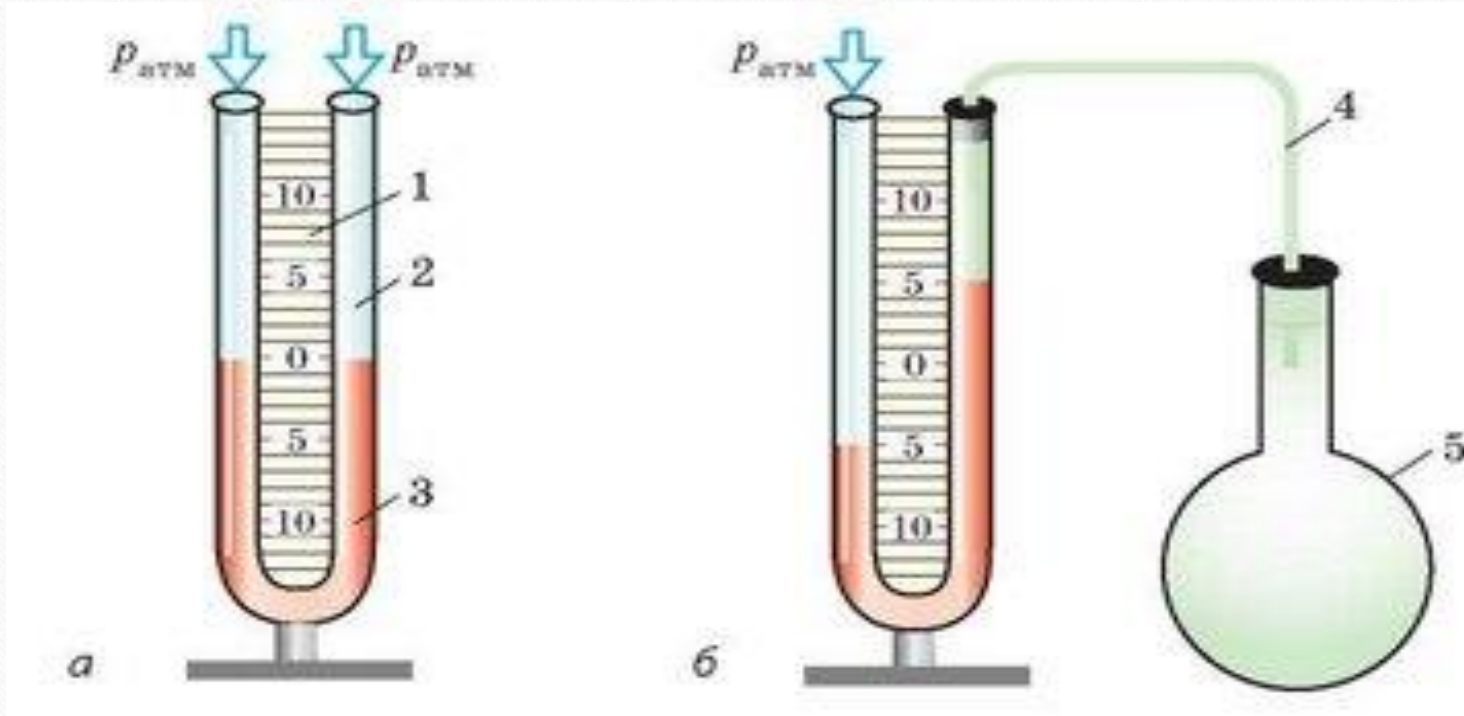
$$p_a - p_K = \rho g h_{\text{вак}}$$

где  $h_{\text{вак}}$  — вакуумметрическая высота



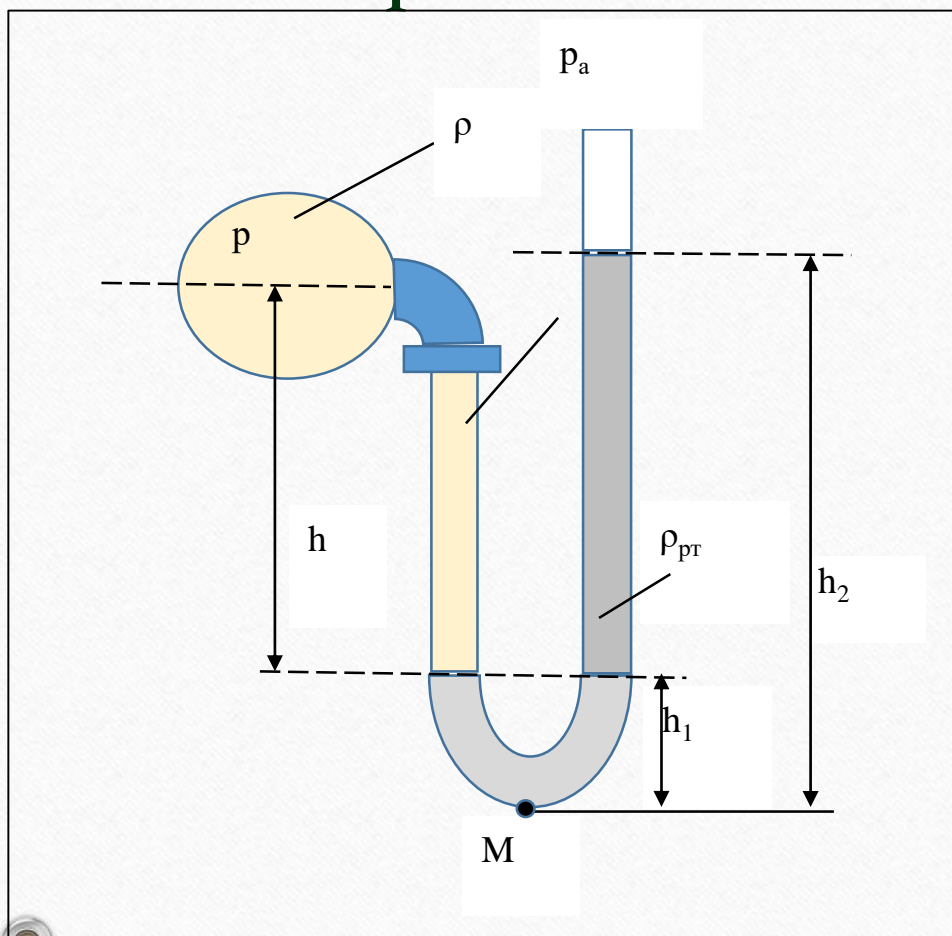
# Способы измерения давления и вакуума

## 3. Манометр



# Способы измерения давления и вакуума

## Манометр



$$p_M = p_a + \rho_{pt} g h_2$$

$$p_M = p + \rho g h + \rho_{pt} g h_1$$

$$p + \rho g h + \rho_{pt} g h_1 = p_a + \rho_{pt} g h_2$$

$$p - p_a = g h (\rho_{pt} - \rho)$$

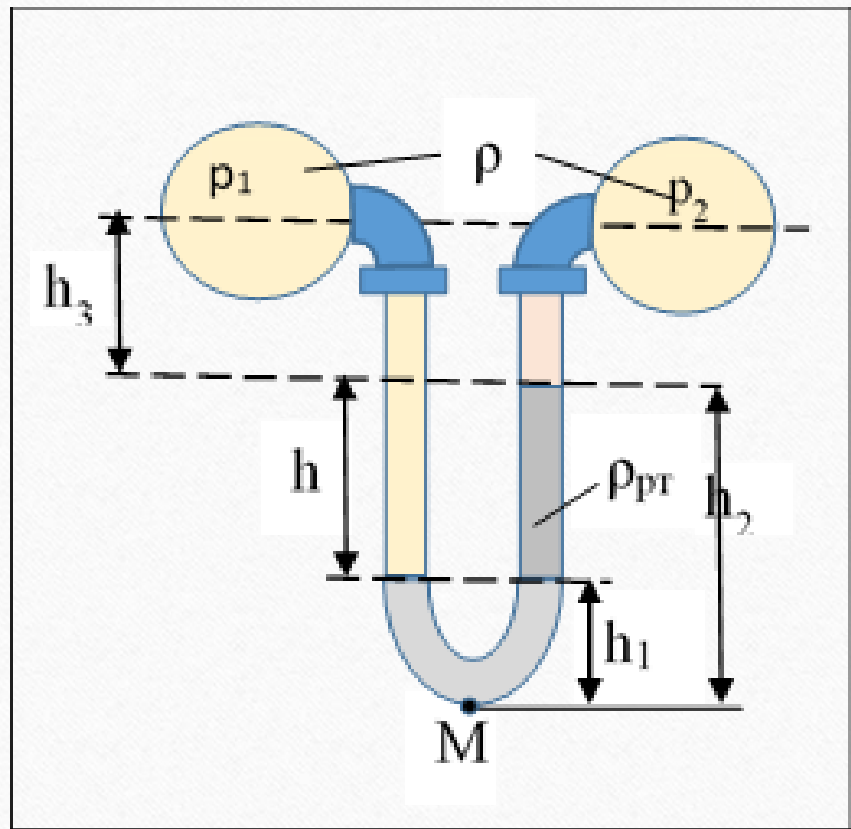
Если в резервуаре, в котором измеряется давление, находится газ, то давлением столба газа  $\rho g h$  можно пренебречь и определять избыточное давление по формуле:

$$p - p_a = \rho_{pt} g h$$



# Способы измерения давления и вакуума

## 4. Дифференциальный манометр



$$p_M = p_1 + \rho g h_3 + \rho g h + \rho_{pt} g h_1$$

$$p_M = p_2 + \rho g h_3 + \rho_{pt} g h_2$$

$$p_1 + \rho g h_3 + \rho g h + \rho_{pt} g h_1$$

$$= p_2 + \rho g h_3 + \rho_{pt} g h_2$$

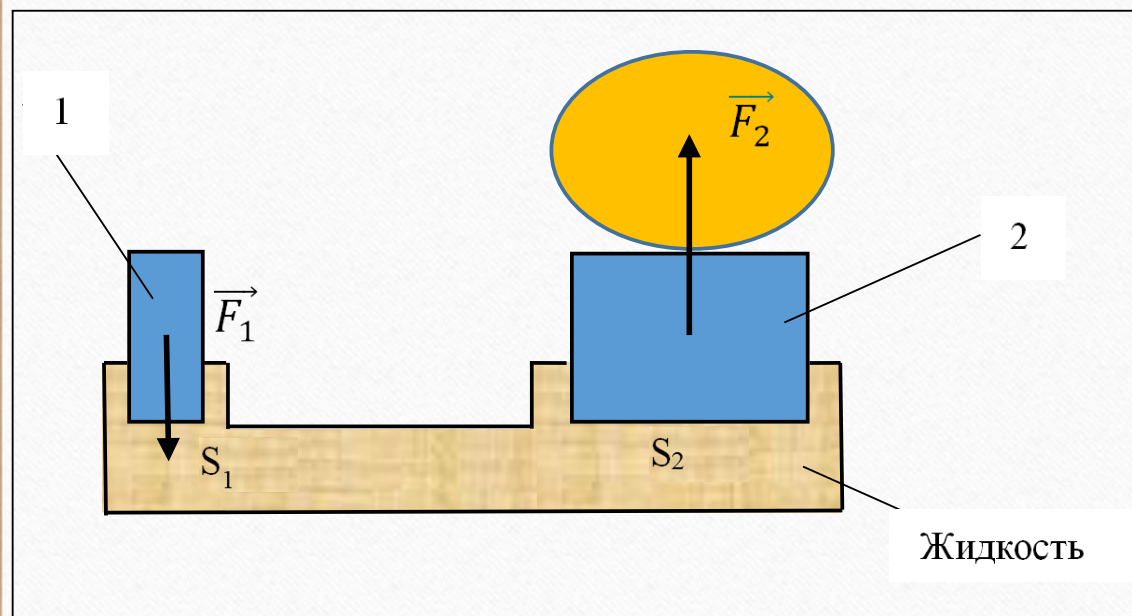
$$p_1 - p_2 = g h (\rho_{pt} - \rho)$$

Формула справедлива, если точки присоединения дифференциального манометра находятся примерно на одном уровне.

## 2.5. Простейшие гидравлические машины

### Гидравлический пресс

Если к поршню 1 с площадью  $S_1$  прикладывается сила  $F_1$ , то жидкость будет передавать давление на поршень 2 с площадью  $S_2$ .



Гидростатическое давление в подпоршневом пространстве одинаково:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p; \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad F_2 = pS_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

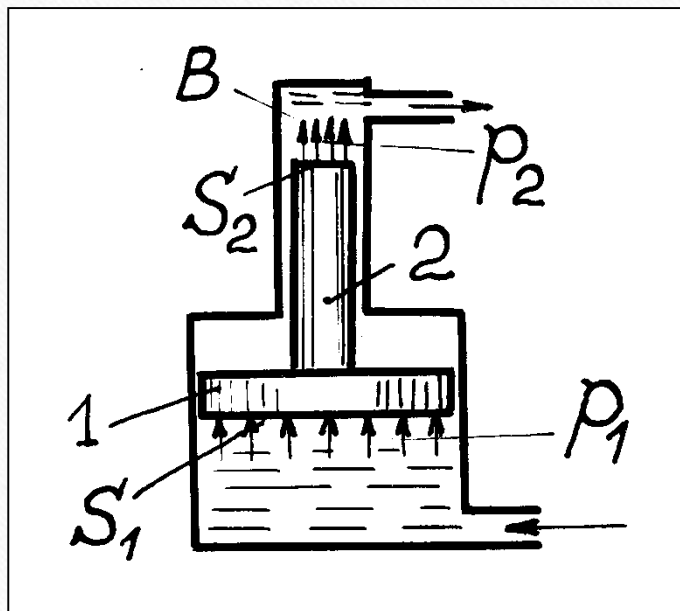
Тогда сила  $F_2$  будет больше силы  $F_1$  в  $\frac{S_2}{S_1}$  раз.



# Простейшие гидравлические машины

## Мультипликатор

В камере 1 к поршню площадью  $S_1$  приложена сила, созданная гидростатическим давлением  $p_1$  :  $F_1 = p_1 * S_1$ .

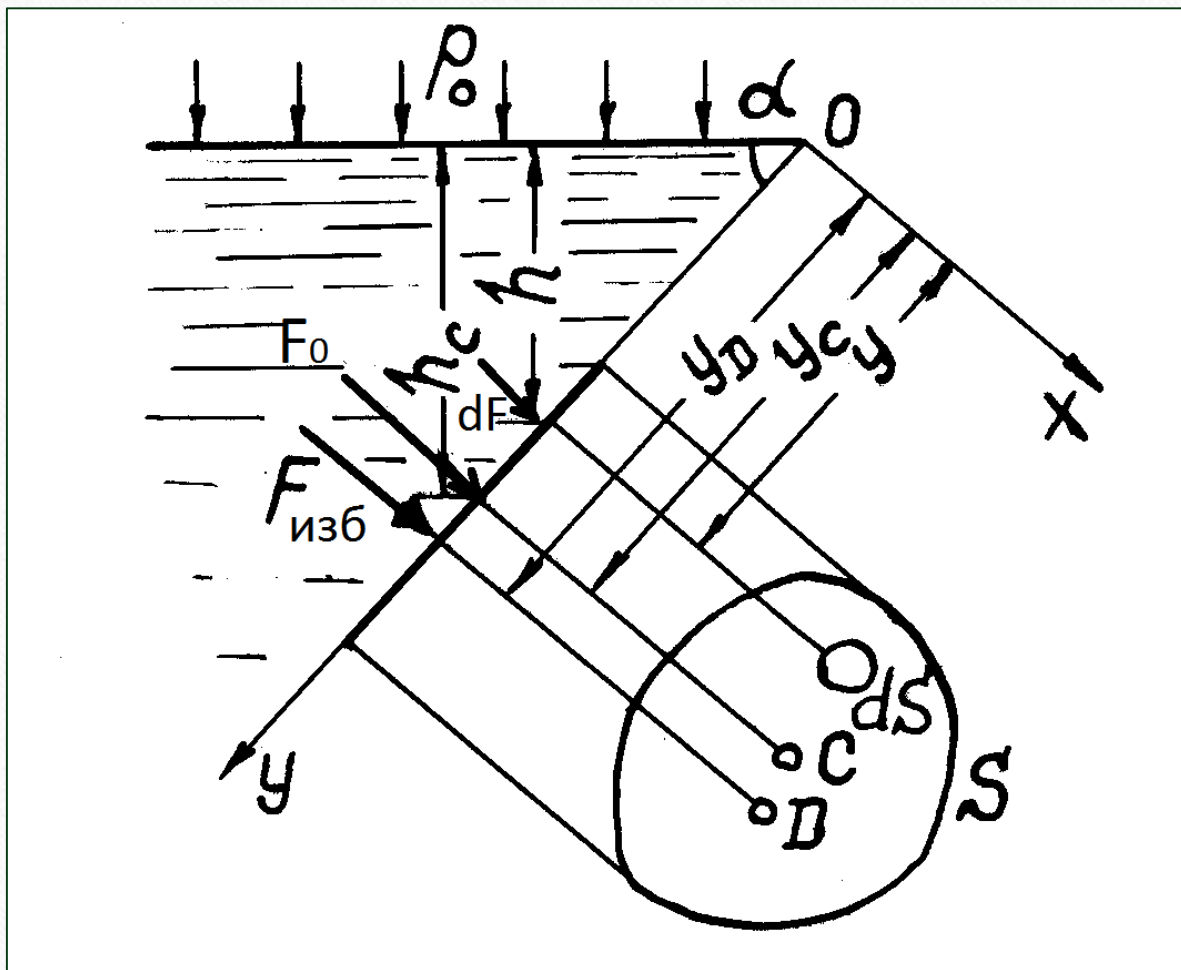


Так как поршень камеры 2 площадью  $S_2$  воспринимает такую же силу  $F_1 = F_2$ , то он будет создавать гидростатическое давление  $p_2$  большее, чем  $p_1$  :

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

Тогда давление  $p_2$  будет больше давления  $p_1$  в  $\frac{S_1}{S_2}$  раз.

## 2.6. Сила давления на плоскую стенку



К бесконечно малой площадке  $dS$  приложена элементарная сила давления  $dF$ :

$$dF = p dS$$

$$p = p_0 + \rho g h$$



## Сила давления на плоскую стенку

$$dF = (p_0 + \rho gh) \cdot dS = p_0 \cdot dS + \rho gh \cdot dS.$$

$$F = p_0 \int_S dS + \rho g \int_S h \cdot dS = p_0 S + \rho g \cdot \sin \alpha \int_S y \cdot dS$$

$\int_S y \cdot dS$  - статический момент площади  $S$  относительно оси  $x$ .

Известно, что:  $\int_S y \cdot dS = y_c S$

Тогда: 
$$F = p_0 S + \rho g \cdot \sin \alpha \cdot y_c \cdot S = (p_0 + \rho gh_c) S$$

## Сила давления на плоскую стенку

$$F = (p_0 + \rho g h_c) S$$

Где  $h_c = y_c \cdot \sin \alpha$  - глубина погружения центра тяжести площади  $S$ ,  $y_c$  - координата центра тяжести площади  $S$ .

$$F = F_0 + F_{изб}$$

где  $F_0$  - сила внешнего давления  $p_0$ ,

$F_{изб.} = \rho g h_c \cdot S$  - сила избыточного давления.



## ***Сила давления на плоскую стенку***

Давление это распределённая нагрузка.

Для упрощения расчётов распределённую нагрузку мысленно заменяют сосредоточенной силой  $F$  (*равной по величине* суммарной силе давления). Точка приложения этой силы называется ***центром давления*** жидкости на заданную площадку.

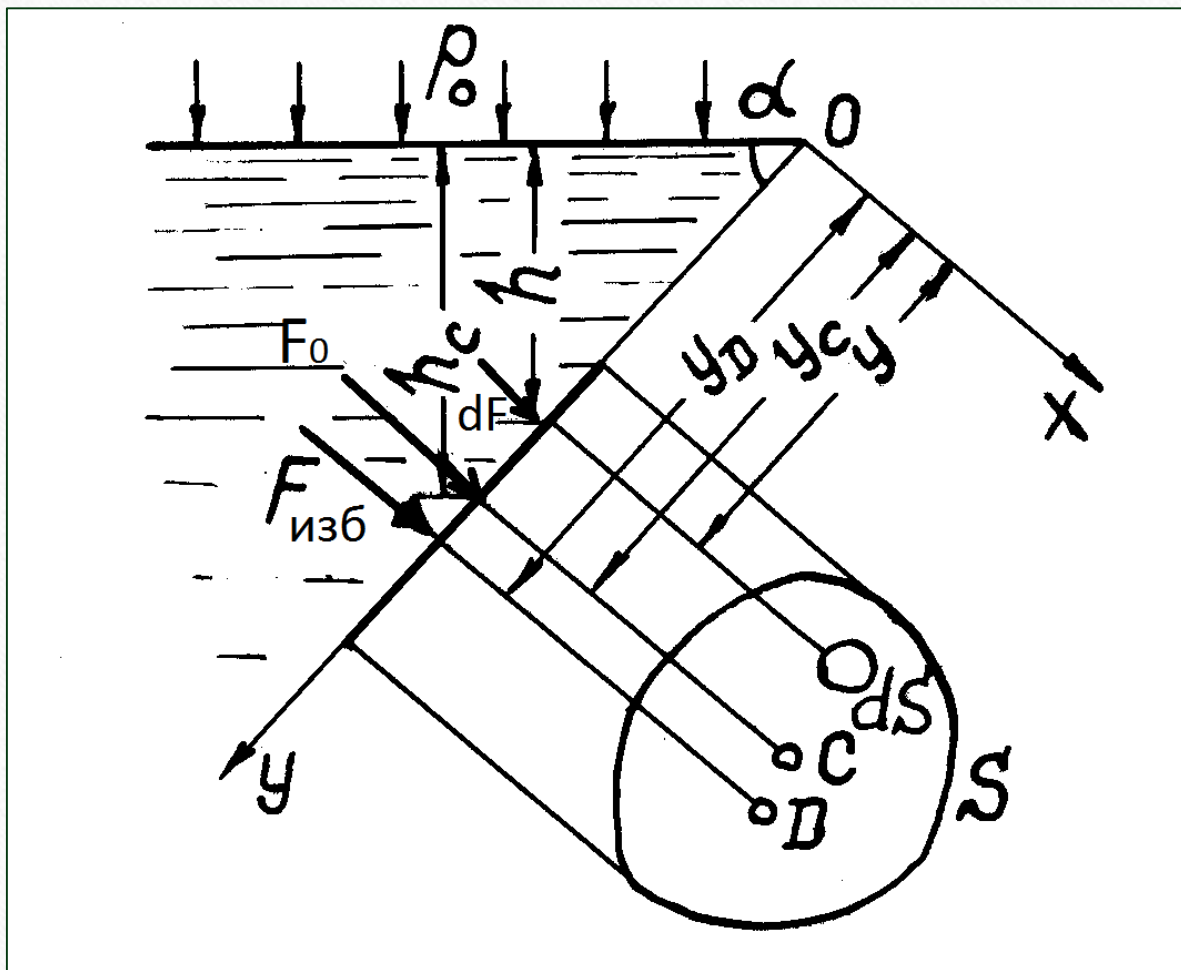
## ***Сила давления на плоскую стенку***

Поскольку суммарная сила  $F$  складывается из двух сосредоточенных сил  $F_0$  и  $F_{изб}$ , можно отдельно найти центры давления этих сил.

Внешнее давление  $p_0$  передается во всем точкам площади одинаково, поэтому его равнодействующая сила  $F_0$  будет приложена в центре тяжести площади  $S$  (точка  $C$ ).

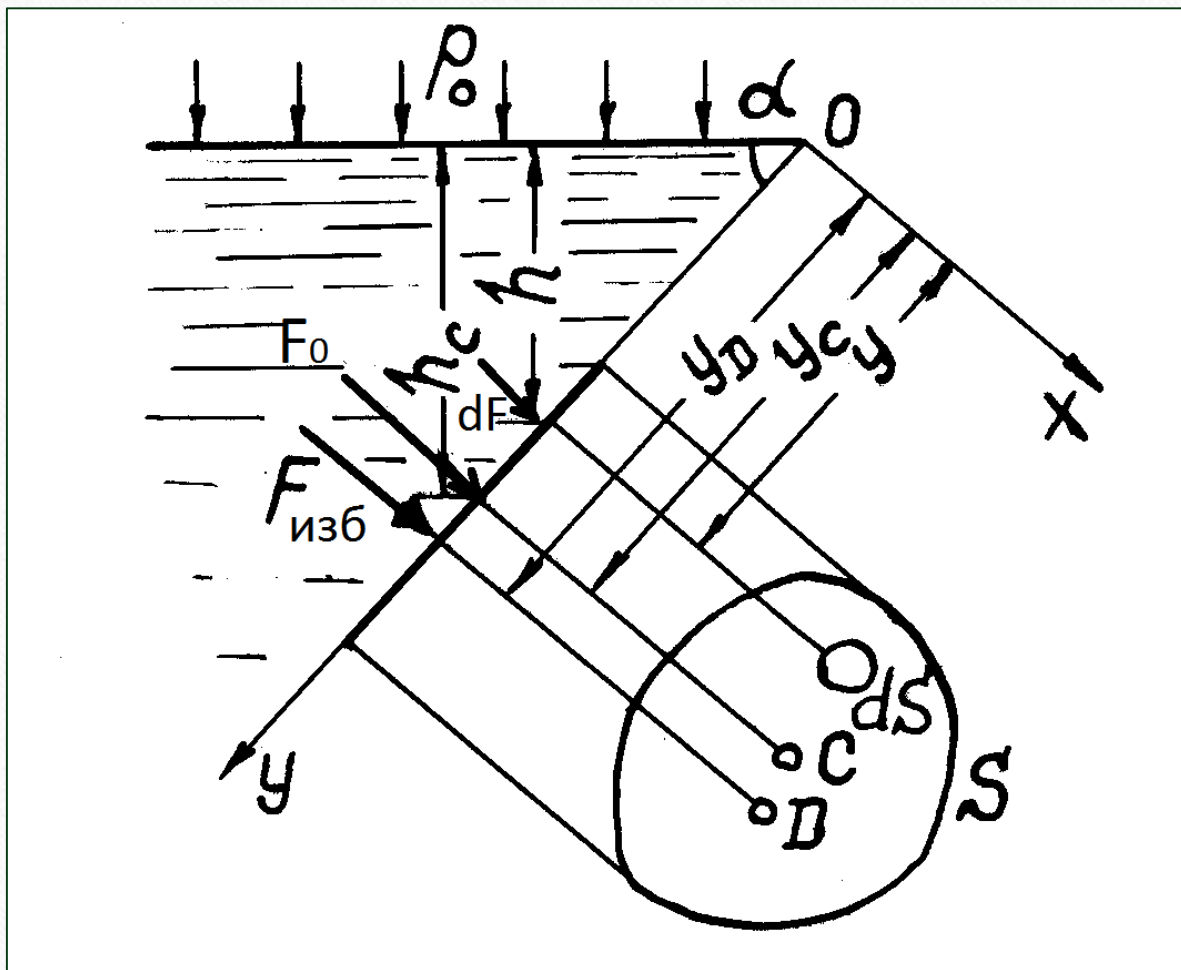


## Сила давления на плоскую стенку



Для нахождения точки приложения силы избыточного давления  $F_{изб}$  (точки  $D$ ) применяется теорема механики: момент равнодействующей силы относительно оси  $x$  равен моменту, создаваемому распределённой нагрузкой).

## Сила давления на плоскую стенку



Уравнение моментов относительно точки О:

$$F_{изб} y_D = \int y \cdot dF_{изб}$$

где  $y_D$  - координата точки приложения силы  $F_{ж.}$

Учитывая, что:

$$dF_{изб} = \rho g \cdot \sin \alpha \cdot y dS$$

И

$$F_{изб.} = \rho g h_c \cdot S$$



## Сила давления на плоскую стенку

Получим:

$$\rho g h_c \cdot S \cdot y_D = \rho g \cdot \sin \alpha \cdot \int y^2 dS$$

$$y_D = \frac{\rho g \cdot \sin \alpha \int_s y^2 \cdot ds}{\rho g \cdot \sin \alpha \cdot y_c S} = \frac{J_x}{y_c S}$$

$$J_x = \int_s y^2 \cdot ds \text{ - момент инерции площади } S \text{ относительно оси } x \text{ (м}^4\text{).}$$

## Сила давления на плоскую стенку

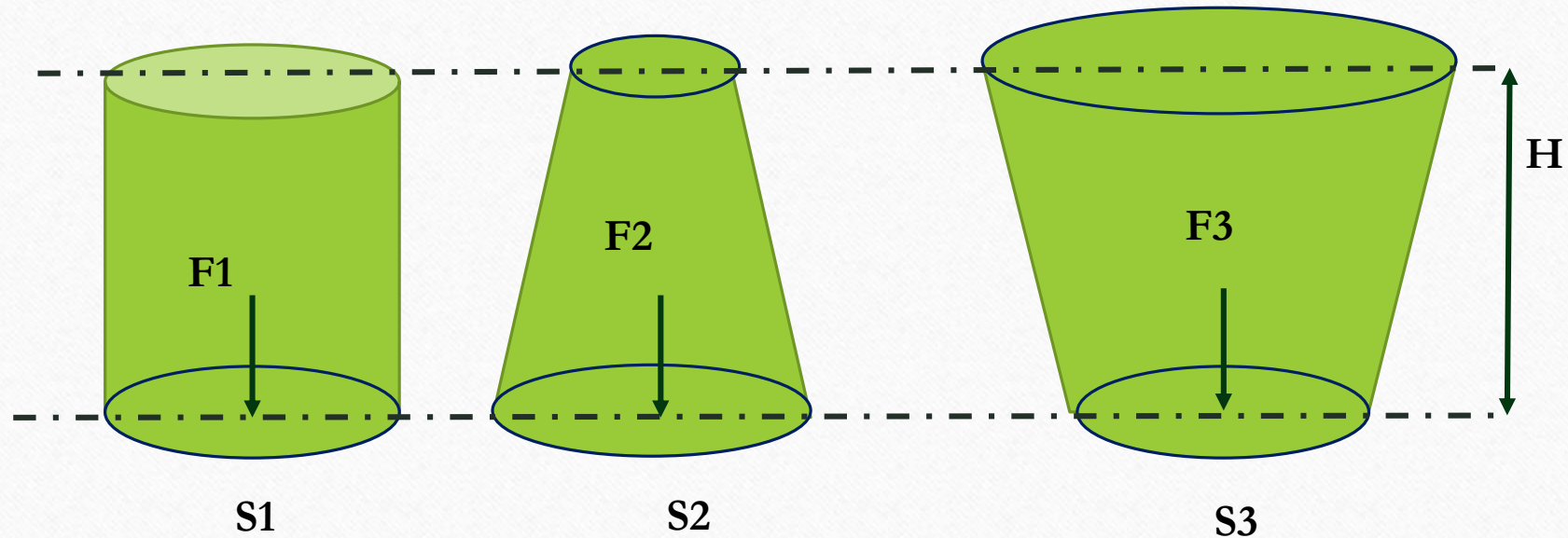
Известно, что:  $J_x = J_{xc} + y_c^2 \cdot S$

$J_{xc}$  - момент инерции площади  $S$  относительно центральной оси  $CX$ , параллельной  $OX$  ( $m^4$ ). Тогда координата точки приложения силы избыточного давления  $F_{\text{изб}}$  :

$$y_D = y_c + \frac{J_{xc}}{y_c \cdot S}$$

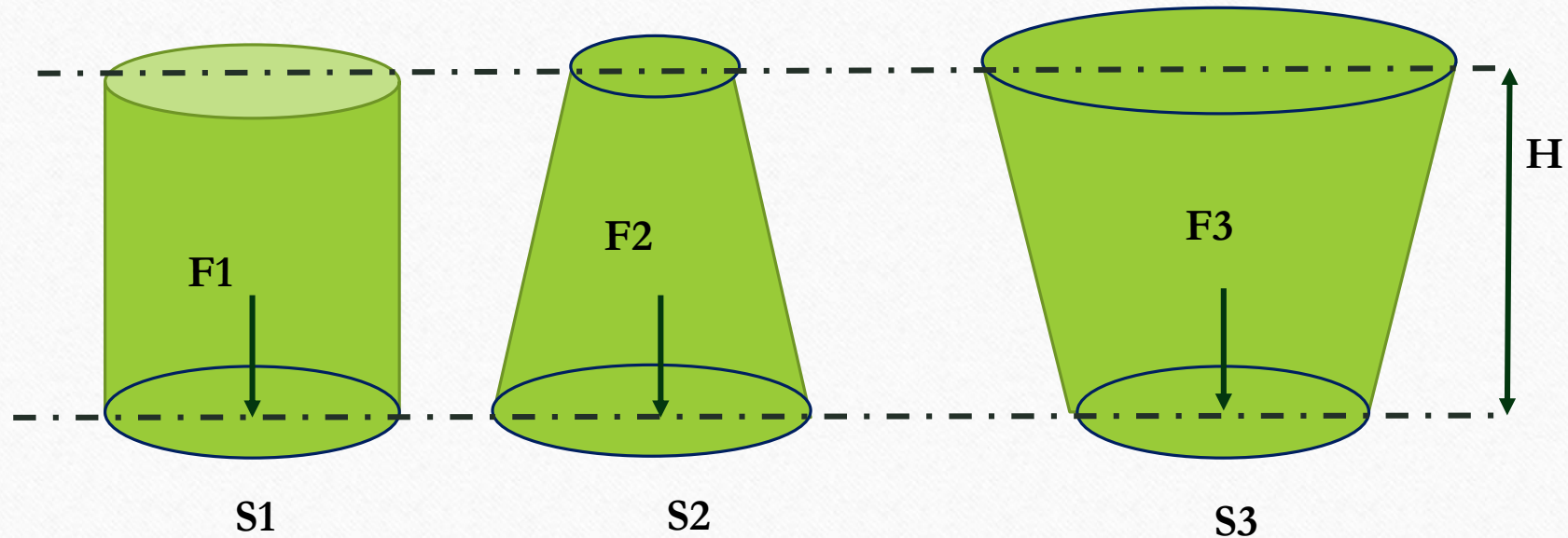


# *Сила давления на плоскую стенку*



**Сравните между собой силы давления на дно сосудов, если  $S1=S2=S3$**

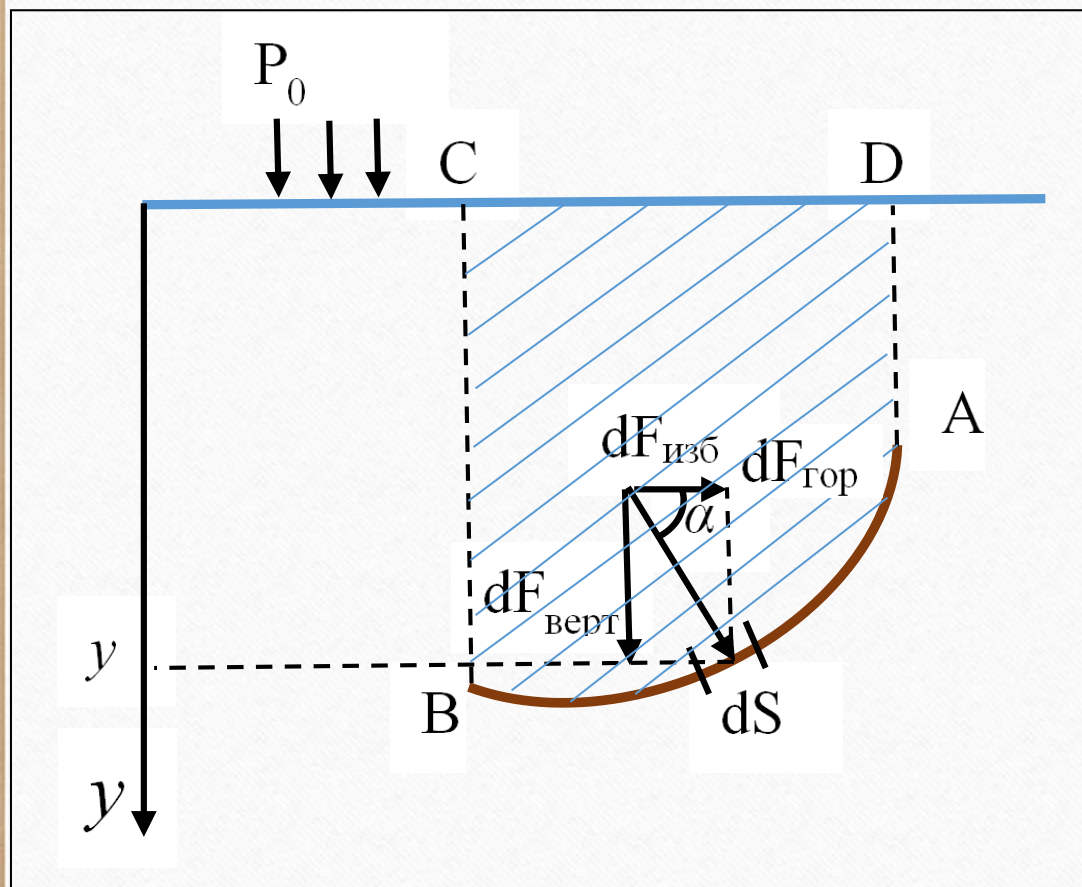
## ***Сила давления на плоскую стенку***



***Сила давления на дно сосуда не всегда равна весу жидкости, находящейся в сосуде.***



## 2.7. Сила давления на криволинейную поверхность



$$dF_{изб.} = \rho g y \cdot dS$$

$$dF_{верт.} = \rho g y \cdot dS \cdot \sin \alpha$$

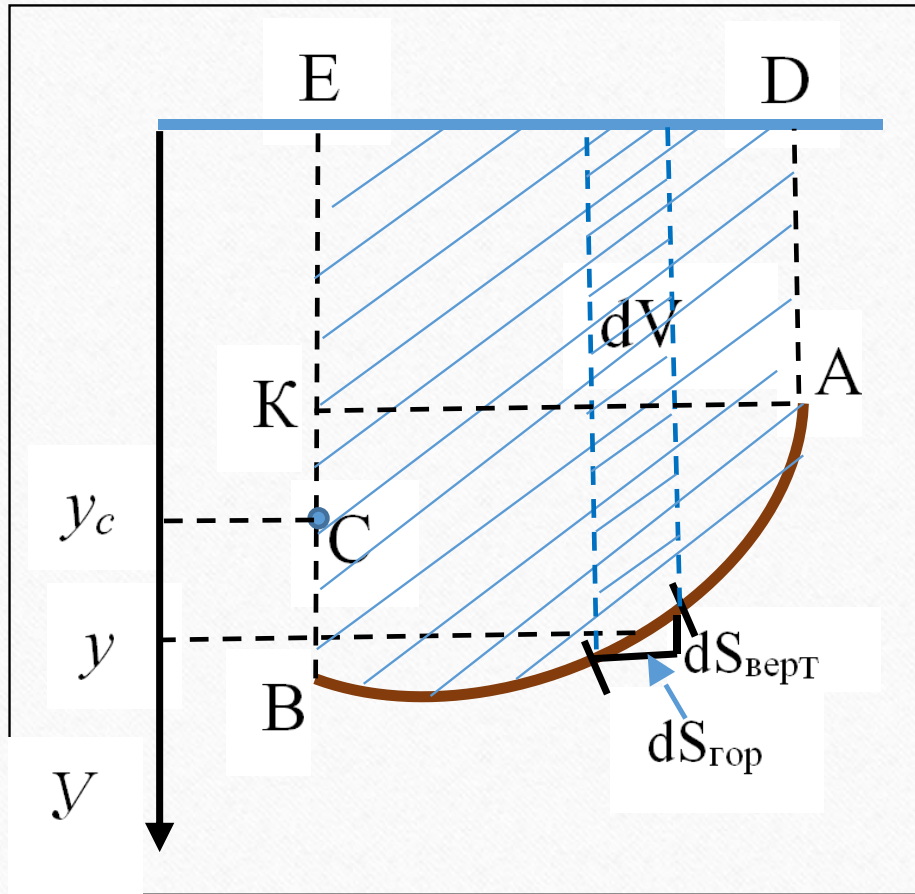
$$dF_{верт.} = \rho g y \cdot dS_{гор}$$

$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS_{верт}$$

Где  $dS_{верт}$  и  $dS_{гор}$  — горизонтальная и вертикальная проекции площадки  $dS$

## Сила давления на криволинейную поверхность

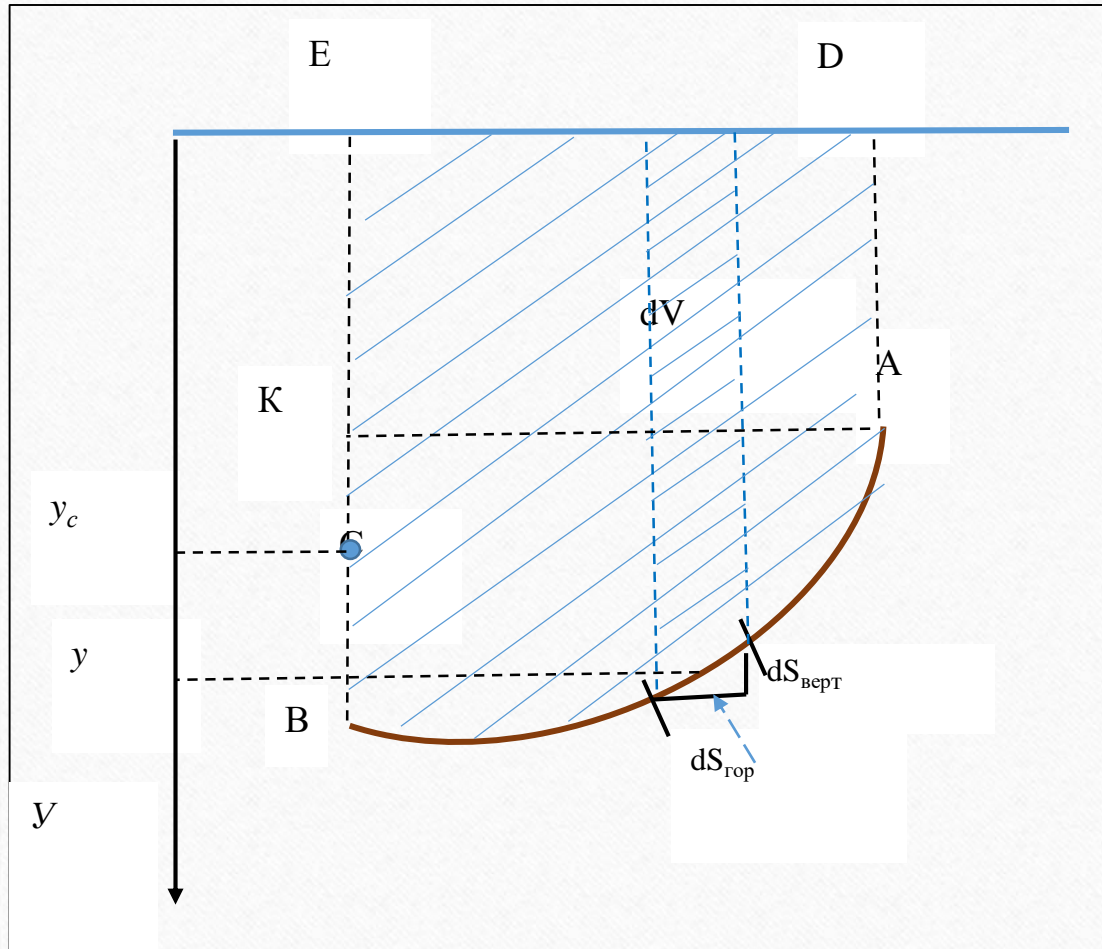


$$F_{\text{верт.}} = \int \rho g y \cdot dS_{\text{гор}} = \rho g V_m$$

где  $V_m$  – объём тела давления.  
Это объём, ограниченный самой криволинейной поверхностью, свободной поверхностью жидкости (или её мысленным продолжением) и вертикальными поверхностями, проведёнными через края криволинейной поверхности.



# Сила давления на криволинейную поверхность



$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS_{верт}$$

$$F_{гор.} = \int \rho g y \cdot dS_{верт} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$$

$$\int_s y \cdot dS_{верт} = y_c S_{верт}$$

где  $S_{верт}$  – вертикальная проекция криволинейной поверхности;  
 $y_c$  – глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции.



## Сила давления на криволинейную поверхность

$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

$$F_{\text{гор.}} = \rho g y_c \cdot S_{\text{верт}}$$

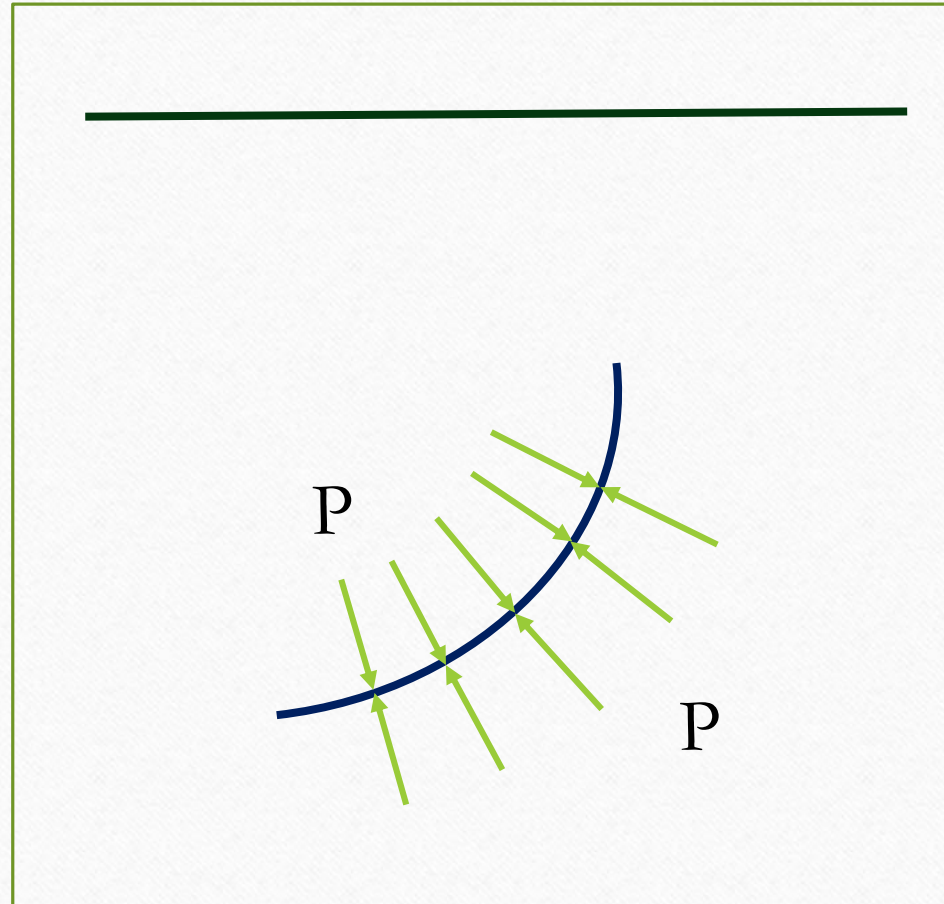
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{верт}}}{F_{\text{гор}}}$$

$$F_{\text{рез}} = \sqrt{F_{\text{гор}}^2 + F_{\text{верт}}^2}$$

где  $\alpha$  – угол наклона результирующей силы избыточного давления к горизонту.

# Сила давления на криволинейную поверхность

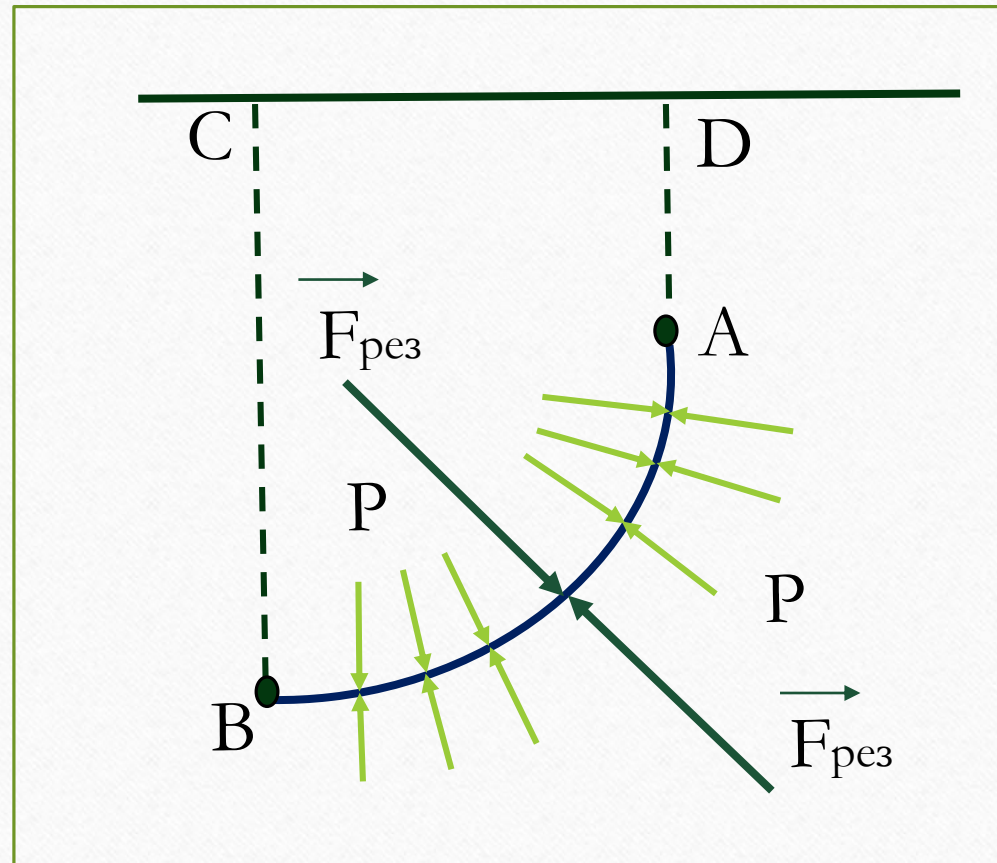
Если жидкость находится с обеих сторон от стенки, то в каждой точке давление слева и справа на стенку будет одинаково.



А, следовательно, и результирующая сила давления с выпуклой и вогнутой стороны будет одинаковой.

# Сила давления на криволинейную поверхность

Поэтому результирующая сила давления с выпуклой стороны определяется по тем же формулам, что и с вогнутой стороны.



$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

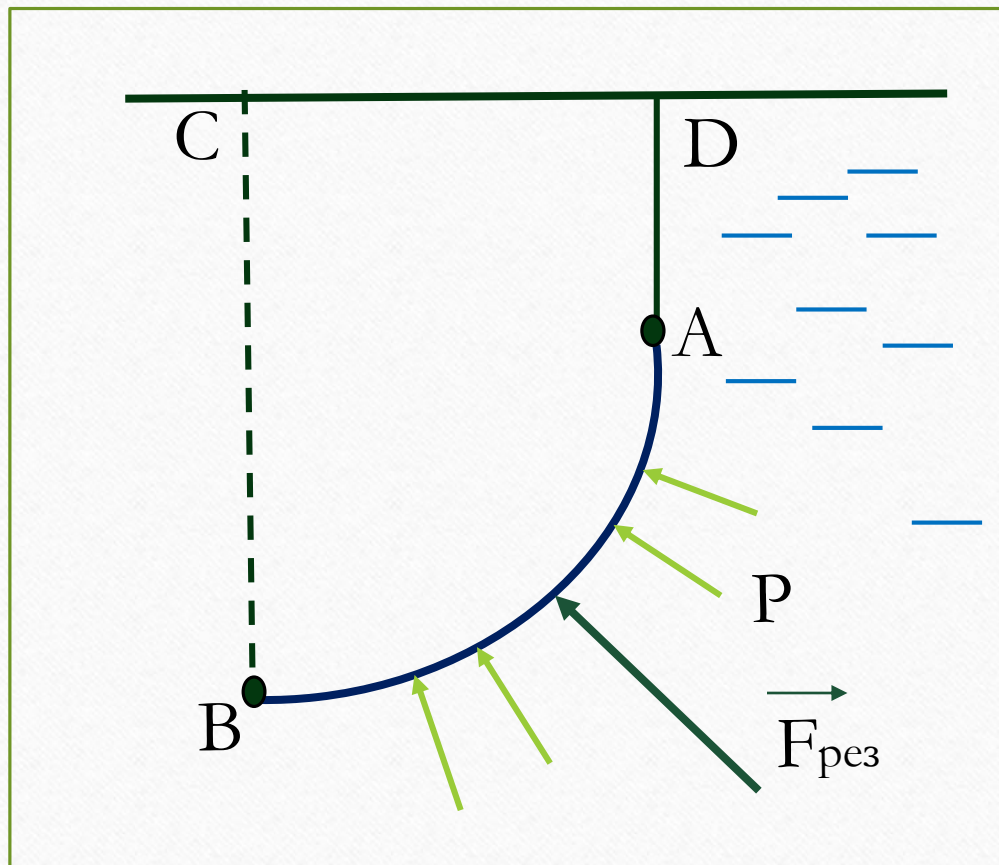
$$F_{\text{гор.}} = \rho g y_c \cdot S_{\text{верт}}$$

Где  $V_m = V_{ABCD}$ ,  
как с выпуклой,  
так и с вогнутой  
стороны.



# Сила давления на криволинейную поверхность

Представим теперь, что жидкость находится только с выпуклой стороны, а с вогнутой стороны находится воздух.



$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

$$F_{\text{гор.}} = \rho g y_c \cdot S_{\text{верт}}$$

Где  $V_m = V_{\text{ABCD}}$ ,  
хотя жидкости в этом объёме нет!

## Сила давления на криволинейную поверхность

$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

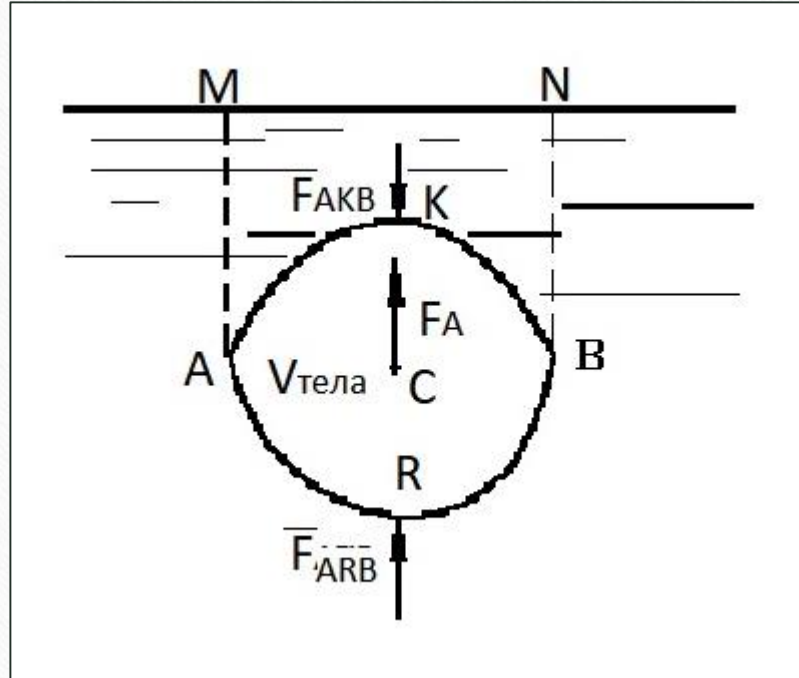
$$F_{\text{гор.}} = \rho g y_c \cdot S_{\text{верт}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{верт}}}{F_{\text{гор}}}$$

$$F_{\text{рез}} = \sqrt{F_{\text{гор}}^2 + F_{\text{верт}}^2}$$

где  $\alpha$  – угол наклона результирующей силы избыточного давления к горизонту.

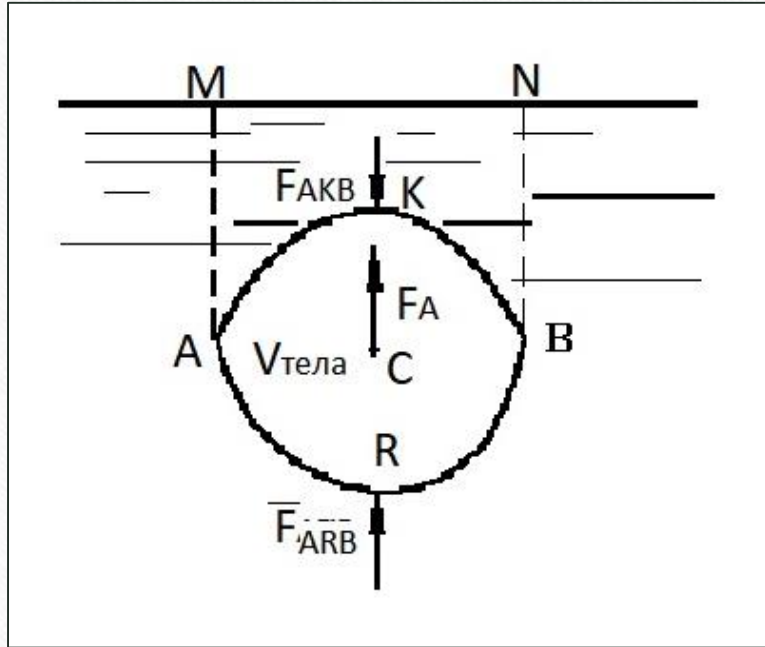
## 2.8. Закон Архимеда



На погруженное в жидкость или газ тело действует выталкивающая сила, равная *весу* вытесненной им жидкости и приложенная в геометрическом центре тяжести тела.



# Закон Архимеда



$$F_{гор.} \Big|_{слева} = F_{гор.} \Big|_{справа}$$

т.к.  $S_{верт}$  одинаковы

На поверхность АКВ действует сила:

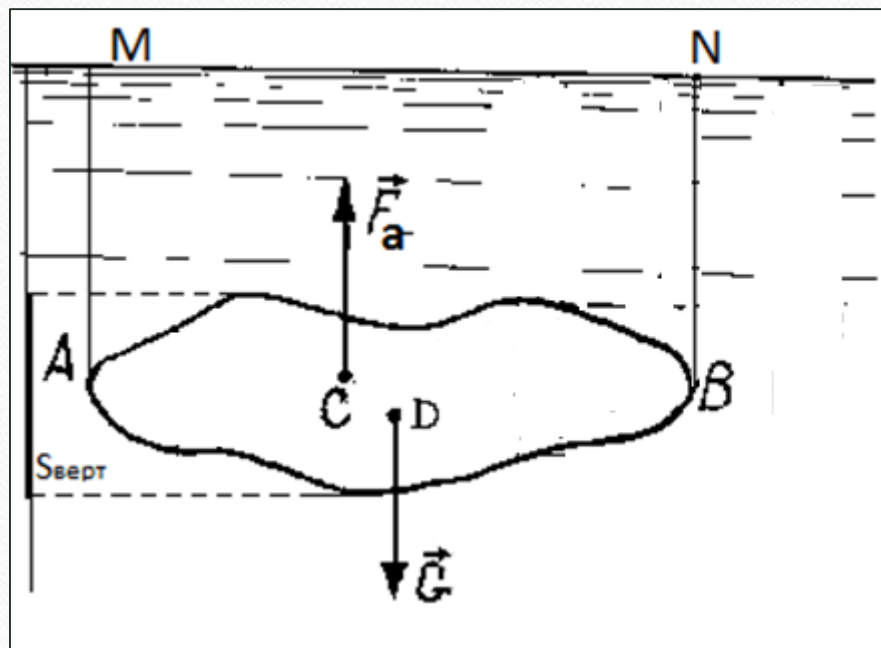
$$F_{AKB} = \rho g V_{MAKBN}$$

На поверхность ARB действует сила:  $F_{ARB} = \rho g V_{MARBN}$

Результирующая сила, действующая на тело со стороны жидкости или газа:

$$F_A = \rho_{жс} g (V_{MARBN} - V_{MAKBN}) = \rho_{жс} g V_{тела} = m_{жс} \cdot g$$

## 2.9. Плавание тел



Собственный вес твердого тела  $G$  приложен в центре масс тела  $D$ :

$$G = \rho_m g V$$

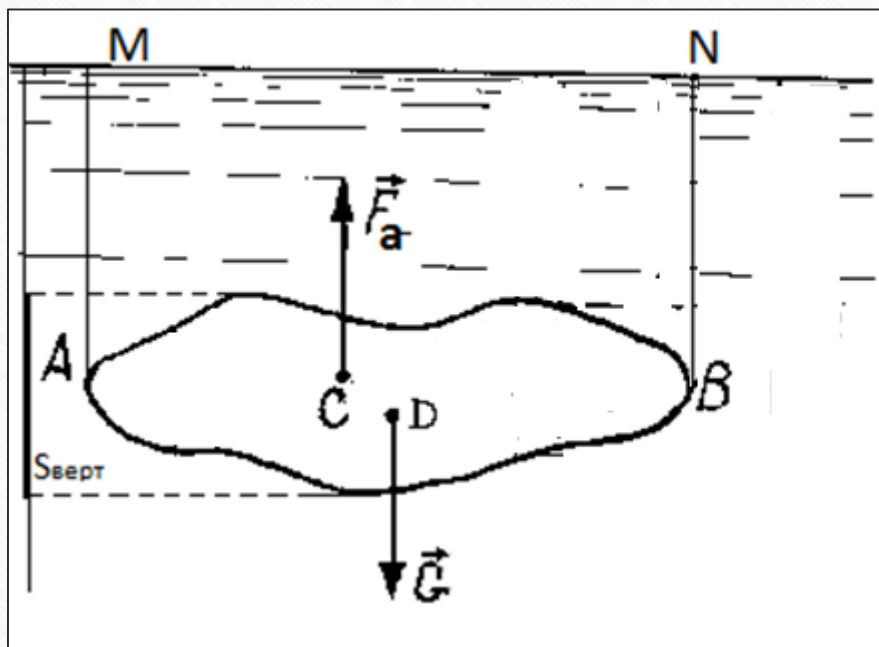
Сила Архимеда приложена в геометрическом центре тяжести тела

$$F_A = \rho_{ж} g V_{тела}$$

Результирующая сила, действующая на тело:

$$F_{рез} = \rho_{ж} g V_{тела} - \rho_m g V_{тела} = g V_{тела} (\rho_{ж} - \rho_m)$$

# Плавание тел



Если  $\rho_{ж} > \rho_{т}$

$F_{рез} > 0 \rightarrow$  Тело всплывает

Если  $\rho_{ж} < \rho_{т}$

$F_{рез} < 0 \rightarrow$  Тело тонет

Если:  $\rho_{ж} = \rho_{т} \rightarrow F_{рез} = 0 \rightarrow$  Тело в равновесии



## **Контрольные вопросы**

1. Что такое гидростатическое давление?
2. Какими свойствами обладает гидростатическое давление?
3. Основное уравнение гидростатики
4. Закон Паскаля
5. Как определить силу гидростатического давления на плоскую стенку?
6. Что такое центр давления?
7. Как определить силу гидростатического давления на криволинейную поверхность?
8. Сформулируйте закон Архимеда.

# Глава 3.

## ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

**Кинематика описывает движение жидкости без связи с силами, определяющими его.**

### ***3.1. Способы задания движения жидкости***

Существует два основных способа задания движения жидкости:

***метод Лагранжа и метод Эйлера***

# Метод Лагранжа

Для каждой мысленно выделенной  $i$ -й частицы жидкости определяется траектория её движения:

$$\begin{array}{lcl} x_i = x_i(t) & \longrightarrow & w_x = x'_t & \longrightarrow & a_x = x''_t \\ y_i = y_i(t) & \longrightarrow & w_y = y'_t & \longrightarrow & a_y = y''_t \\ z_i = z_i(t) & \longrightarrow & w_z = z'_t & \longrightarrow & a_z = z''_t \end{array}$$



# Метод Эйлера

Метод Эйлера, заключается в задании поля скоростей:

$$w_x = w_x(x, y, z, t)$$

$$w_y = w_y(x, y, z, t)$$

$$w_z = w_z(x, y, z, t)$$

(т.е. в задании зависимостей трёх проекций скорости от координат и времени).

Совокупность всех векторов скорости в потоке называется *полем скоростей*.

**Основное отличие в методах Лагранжа и Эйлера** заключается в том, что в первом случае  $x, y, z$  – переменные координаты *движущейся частицы*, а во втором – это *координаты фиксированных точек пространства*, через которые в данный момент времени проходят **частицы жидкости**.

# Метод Эйлера

Метод Эйлера, заключается в задании поля скоростей:

$$\begin{aligned} w_x = w_x(x, y, z, t) & \longrightarrow a_x = \frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \\ w_y = w_y(x, y, z, t) & \\ w_z = w_z(x, y, z, t) & \end{aligned} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z};$$

(Учитывая, что  $w_x = \frac{\partial x}{\partial t}$ ,  $w_y = \frac{\partial y}{\partial t}$ ,  $w_z = \frac{\partial z}{\partial t}$  )



## Метод Эйлера

Проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z};$$

$$a_y = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

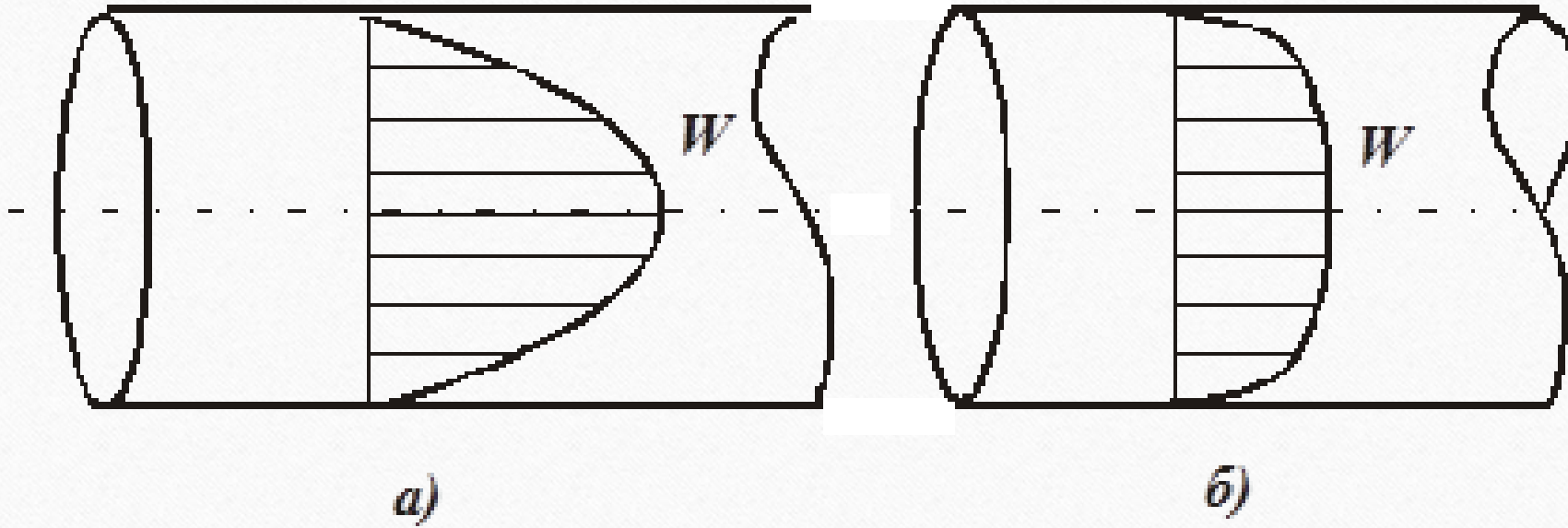
## Метод Эйлера

Члены  $\frac{\partial w_x}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w_y}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial w_z}{\partial t}$

показывают *интенсивность изменения скорости во времени* для частицы, проходящей точку с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$  – это локальные или местные ускорения .

Остальные три члена в каждом уравнении показывают *интенсивность изменения скорости в пространстве*, т.е. определяют ускорение частицы в связи с её переходом в соседнюю точку с другим значением скорости - это конвективные ускорения частиц.

## Метод Эйлера



Конвективные ускорения показывают интенсивность изменения скорости **в пространстве**, тогда как локальные ускорения показывают интенсивность изменения скорости **во времени**.



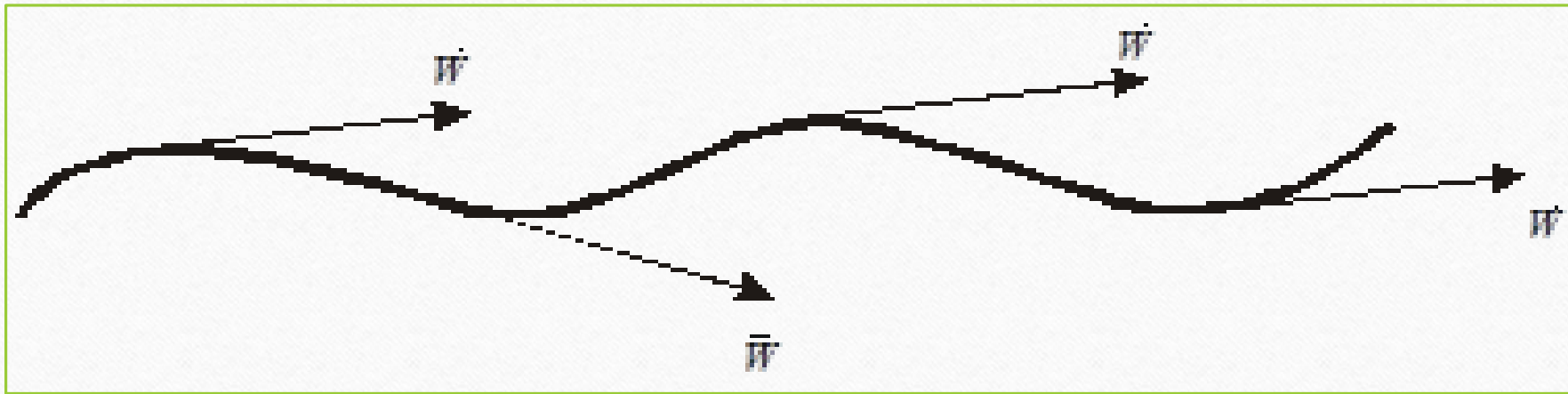
## **3.2. Поток жидкости и его характеристики**

Если параметры движения не зависят от времени, то такое движение называется ***стационарным***.

Если параметры движения зависят от времени, то такое движение называется ***нестационарным***.

# Поток жидкости и его характеристики

*Линией тока* называется такая линия в потоке жидкости, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к этой линии



## ***Поток жидкости и его характеристики***

След движения частицы называется ее ***траекторией***.

В случае стационарного поля скоростей линии тока и траектории совпадают.

Скорость жидкости в данной точке потока называется **местной скоростью**.



## СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

$$\bar{w} = \frac{\int w dt}{\Delta t}$$

- средняя по времени скорость в данной точке

*w - мгновенная скорость*

$$w_{cp} = \frac{\int w dS}{S}$$

- средняя по сечению скорость в данном сечении

*w - местная скорость*

**Расход** – это количество жидкости или газа, протекающее в единицу времени через поперечное сечение потока.

Различают *объёмный*  $Q$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$  и *массовый*  $G$ ,  $\text{кг}/\text{с}$  расход жидкости:

$$Q = \frac{V}{t}; \quad G = \frac{M}{t}$$

$$G = \rho \cdot Q$$

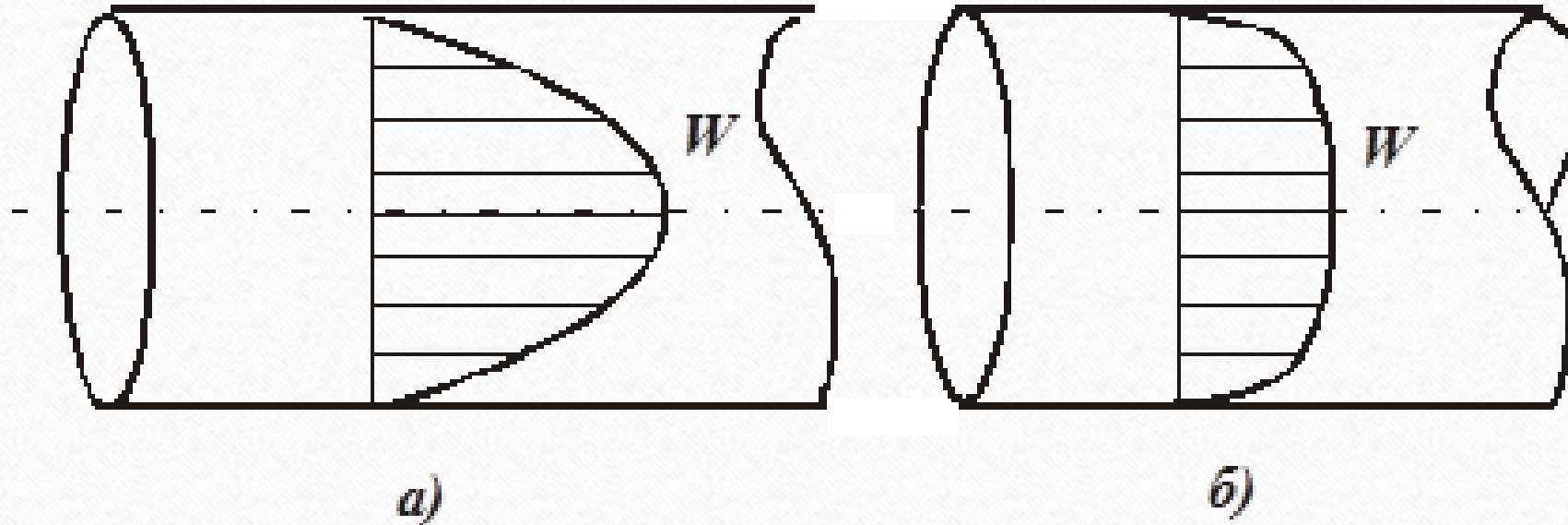
$$Q = \int_S w \cdot dS = w_{cp} \cdot S$$

$$w_{cp} = \frac{\int_S w dS}{S}$$

- *средняя по сечению* скорость потока

## Поток жидкости и его характеристики

Распределение векторов скорости по нормальному сечению потока называется *профилем скорости*.

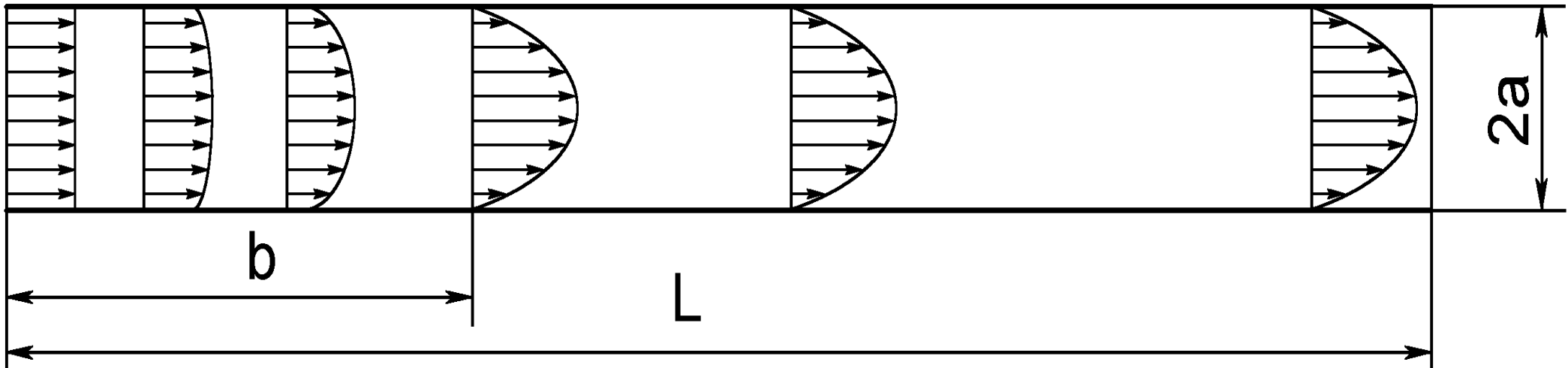


Движение, при котором профиль скоростей во всех сечениях одинаков, называется *установившимся*.



# ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ

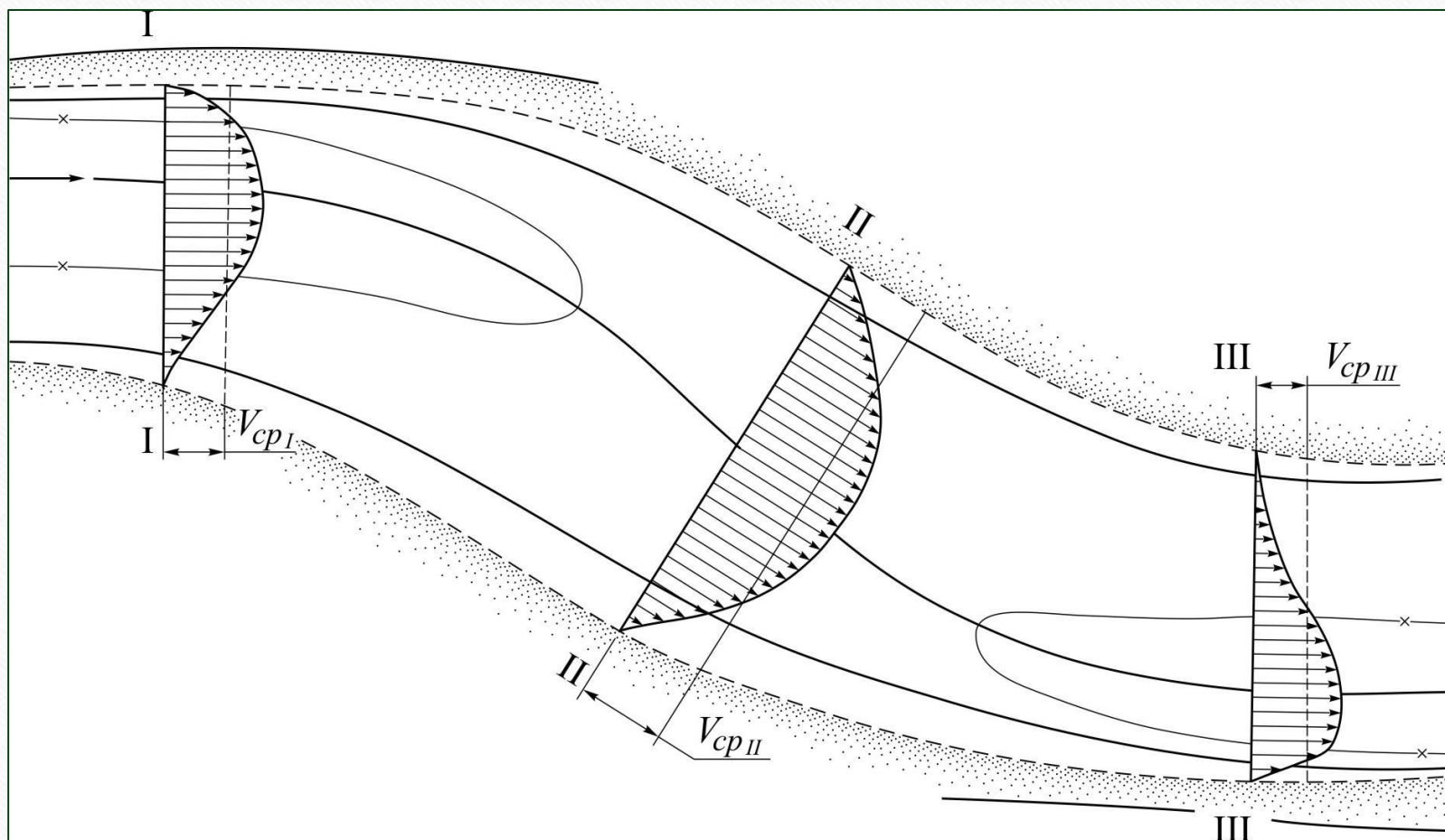
## Установившееся и неустановившееся движение



Вблизи входного участка трубы ( $b$ ) движение неустановившееся, а в основной части трубы ( $L - b$ ) - установившееся движение

# ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ

## Неустановившееся движение



## **ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ**

**Пространственным** называется движение жидкости, параметры которого зависят от трех координат.

**Плоским** называется движение жидкости, параметры которого зависят от двух координат.

**Линейным** называется движение жидкости, параметры которого зависят лишь от одной координаты.



## ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ

**Ламинарным** называется движение, при котором *отсутствует перемешивание* между слоями жидкости, линии тока плавные параллельные друг другу.

**Турбулентным** называется движение, при котором *происходит перемешивание* слоёв, частицы жидкости движутся хаотически, параметры потока пульсируют относительно своих средних значений.

### 3.3. Уравнение неразрывности движения жидкости

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы применительно к потоку движущейся жидкости или газа .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$$



## Уравнение неразрывности движения жидкости

Для частных случаев движения жидкости уравнение неразрывности будет упрощаться.

- для *стационарного* движения несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

- для *плоского стационарного* движения несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

- Для *линейного стационарного* движения сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = 0$$



## Уравнение неразрывности движения жидкости

Для стационарного потока жидкости в непроницаемом канале (все частицы жидкости движутся в одном направлении) интегрирование уравнения неразрывности даёт уравнение сплошности в гидравлической форме:

$$G = \int_S \rho w \cdot dS = (\rho w)_{cp} \cdot S = const$$

ИЛИ:

$$G = (\rho w)_{cp} \cdot S = const$$

## **Уравнение неразрывности движения жидкости**

Следовательно, массовый расход жидкости  $G$  через любое нормальное сечение потока  $S$  – **величина постоянная.**

Для несжимаемой жидкости объёмный расход через любое нормальное сечение потока - также величина постоянная:

$$Q = w_{cp} S = const$$

Откуда, для любых двух сечений потока:  $w_1 S_1 = w_2 S_2$

Следовательно,  $w_2 = w_1 S_1 / S_2$ .



## **Контрольные вопросы**

1. Какое движение называется стационарным?
2. Какое движение называется нестационарным?
3. Какое движение называется установившимся?
4. Что такое линия тока?
5. Что такое профиль скорости?
6. Какое движение называется плоским?
7. Что такое расход?
8. Что такое местная скорость?
9. Напишите уравнение сплошности в гидравлической форме



# Глава 4.

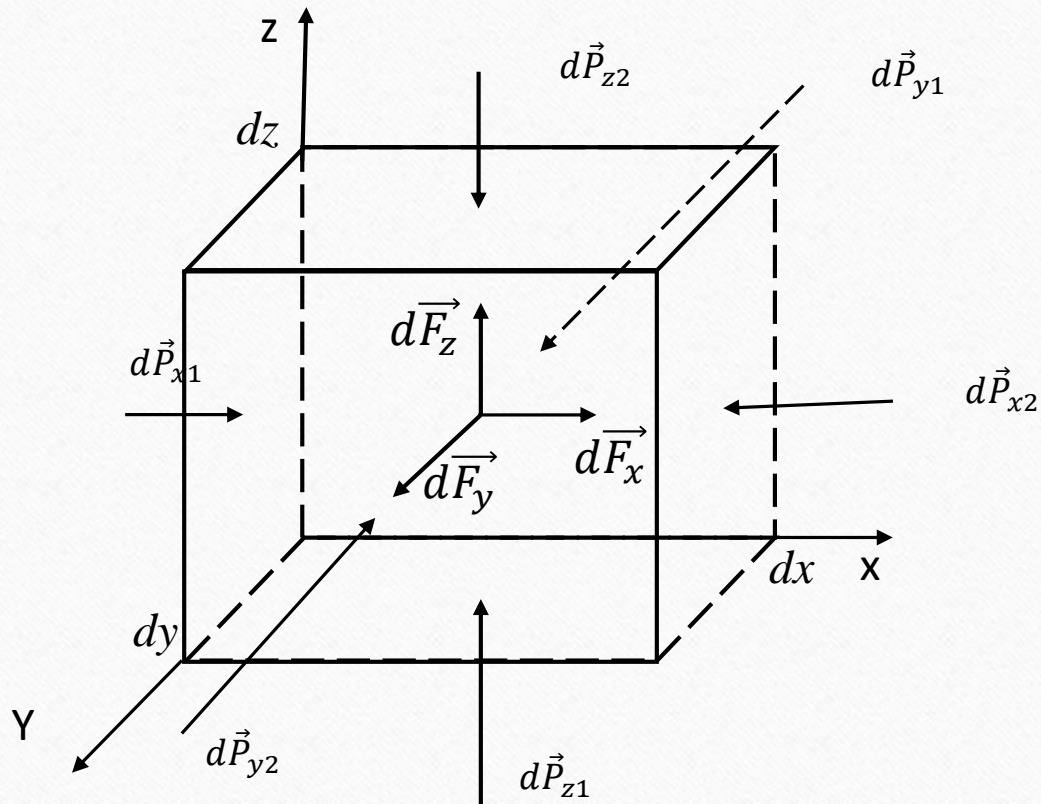
## ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**Идеальной** называется **невязкая** и **несжимаемая** жидкость.

### ***4.1. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)***

Уравнения движения Эйлера выражают 2-й закон Ньютона применительно к потоку идеальной жидкости.

## Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)



Силы давления на левую и правую грани:

$$d\vec{P}_{x1} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dy dz$$

$$d\vec{P}_{x2} = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dy dz$$

Проекция массовой силы на ось x:

$$dF_x = f_x \rho \cdot dx dy dz$$

где  $f_x$  - проекция вектора плотности распределения массовых сил на ось x



Уравнения Эйлера выражают 2-й закон Ньютона применительно к жидкостям и газам.

Уравнение движения выделенного объема жидкости в проекции на ось  $x$  :  $dF_x - dP_{x1} + dP_{x2} = \rho dx dy dz \frac{dw_x}{dt}$



$$f_x \rho \cdot dx dy dz - \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dy dz + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{2} \right) dy dz = \rho dx dy dz \frac{dw_x}{dt} \longrightarrow$$

Аналогично:

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt}$$
$$f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_y}{dt}$$
$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw_z}{dt}$$



## Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)


$$\left\{ \begin{array}{l} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_y}{dt} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw_z}{dt} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}; \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{array} \right.$$

# Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)



$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt}$$

$$f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_y}{dt}$$

$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw_z}{dt}$$



$$\vec{f} = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}$$

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{dw_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dw_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dw_z}{dt} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$\frac{\partial(w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z)}{\partial z} = 0$$

Уравнение неразрывности идеальной жидкости нужно присоединить к системе, чтобы она была замкнута.



## Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера )

Для того, чтобы система  была замкнутой, к ней необходимо присоединить уравнение неразрывности.

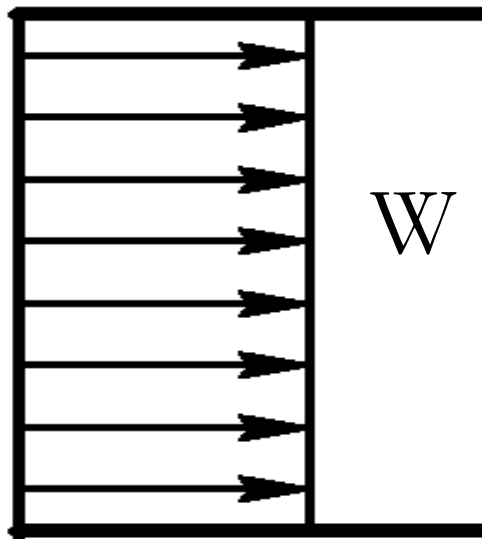
Граничные условия при обтекании невязкой жидкостью твердых поверхностей :

- условие *скольжения* - на твёрдой стенке касательная к поверхности составляющая скорости жидкости равна скорости в потоке (т.е. стенка не оказывает тормозящего влияния на идеальную жидкость)
- условие *непротекания* - равенство нулю на стенке нормальной составляющей скорости.



# Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера )

## Условие скольжения



на твёрдой стенке касательная к поверхности составляющая скорости жидкости равна скорости в потоке.

## 4.2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Пусть идеальная жидкость движется в потенциальном поле массовых сил с потенциалом  $\Pi$ .

Это означает, что существует такая функция  $\Pi$ , что:

$$\vec{f} = -grad\Pi$$

$\vec{f}$  - вектор плотности распределения массовых сил.

## Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Это означает, что:  $f_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$     $f_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$     $f_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$

Подставим эти выражения в уравнения движения Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dw_x}{dt} \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dw_y}{dt} \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \bullet dx \\ + \\ \bullet dy \\ + \\ \bullet dz \end{array} \longrightarrow$$



## Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Получим:

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ & = \frac{dw_x}{dt} dx + \frac{dw_y}{dt} dy + \frac{dw_z}{dt} dz \end{aligned}$$

заметим, что:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = d\Pi$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp$$

## Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

заметим, что:

$$\frac{dx}{dt} = w_x \quad \frac{dy}{dt} = w_y \quad \frac{dz}{dt} = w_z$$

$$\frac{dw_x}{dt} dx + \frac{dw_y}{dt} dy + \frac{dw_z}{dt} dz = d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

$$w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z = d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

Получим: 
$$d\left(\frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

## **Уравнение Бернулли для идеальной жидкости**

Обозначим  $B = \frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}$  - трёхчлен Бернулли

Тогда:  $dB = 0$

Следовательно:  $B = \frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} = const$

**Следовательно, вдоль линии тока трёхчлен Бернулли сохраняет постоянное значение.**

**Это выражение представляет собой закон Бернулли для идеальной жидкости, движущейся в поле любых потенциальных сил с потенциалом  $\Pi$ .**



## Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Рассмотрим частный случай, когда идеальная жидкость движется в поле сил тяжести, других массовых сил нет, ось  $z$  направлена вертикально вверх, тогда:  $\vec{f} = -\vec{g}$

С другой стороны:  $f_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ , откуда:  $g = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \Rightarrow \Pi = gz + C,$

где  $C$  – константа интегрирования.

Подставим  $\Pi$  в уравнение Бернулли:

$$B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$



**- закон Бернулли для несжимаемой жидкости, движущейся в поле сил тяжести.**

**Закон Бернулли является частным случаем закона сохранения энергии применительно к потоку движущейся жидкости.**

### **4.2.1. Энергетическая трактовка уравнения Бернулли:**

$$\frac{w^2}{2}$$

- удельная (Дж/кг) кинетическая энергия потока;

$$\frac{p}{\rho}$$

- удельная (Дж/кг) потенциальная энергия сил давления;

$$gz$$

- удельная (Дж/кг) потенциальная энергия положения жидкости в поле сил тяжести;

$B$  - полная удельная механическая энергия потока (Дж/кг) - величина постоянная.



## Энергетическая трактовка уравнения Бернулли

Поскольку полная удельная механическая энергия потока (Дж/кг) - величина постоянная, то *если* *меняется одна из составляющих уравнения Бернулли,* *то должна измениться и какая-нибудь другая его составляющая* (один вид энергии переходит в другой вид энергии).



## 4.2.2. Формы уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости

$$B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$



Для двух произвольных сечений потока идеальной жидкости на любой линии тока будет справедливо уравнение:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$



## Формы уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости

$$B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$



Умножим левую и правую часть уравнения на  $\rho$ :

$$P^* = \frac{\rho w^2}{2} + p + \rho gz = const, \text{ Па}$$

$$\frac{\rho w_1^2}{2} + p_1 + \rho gz_1 = \frac{\rho w_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2$$



**Здесь:**

$\frac{\rho w^2}{2}$  - Скоростной (динамический) напор, Па;

$p$  - гидростатическое давление, Па;

$\rho g z$  - давление столба жидкости высотой  $z$ , Па;

$P^*$  - полный напор (полное давление), Па.

---

$p + \rho g z$  - статическая составляющая полного давления;

$\frac{\rho w^2}{2}$  - динамическая составляющая полного давления;



# Формы уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости

$$B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$



Разделим левую и правую часть этого уравнения на  $g$ :

$$H^* = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = const$$

, м

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$



## Формы уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости

Здесь:

$$\frac{w^2}{2g}$$

- Скоростная высота, м;

$$\frac{p}{\rho g}$$

- Пьезометрическая высота, м

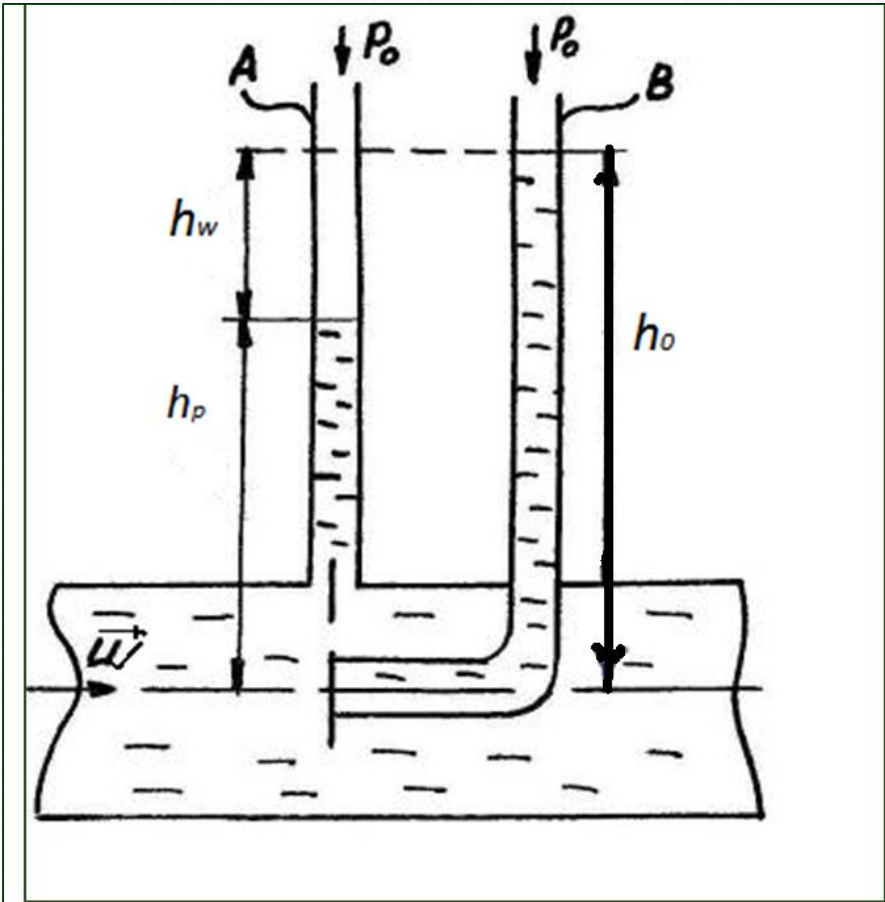
$$z$$

- Нивелирная высота, м (это расстояние от произвольной горизонтальной плоскости сравнения до данной линии тока);

$$H^*$$

- Гидравлическая высота (полный напор в метрах).





### 4.2.3. Измерение составляющих уравнения Бернулли

$$h_w = \frac{w^2}{2g} \quad - \quad \text{Скоростная высота, м;}$$

$$h_p = \frac{p}{\rho g} \quad - \quad \text{Пьезометрическая высота, м.}$$

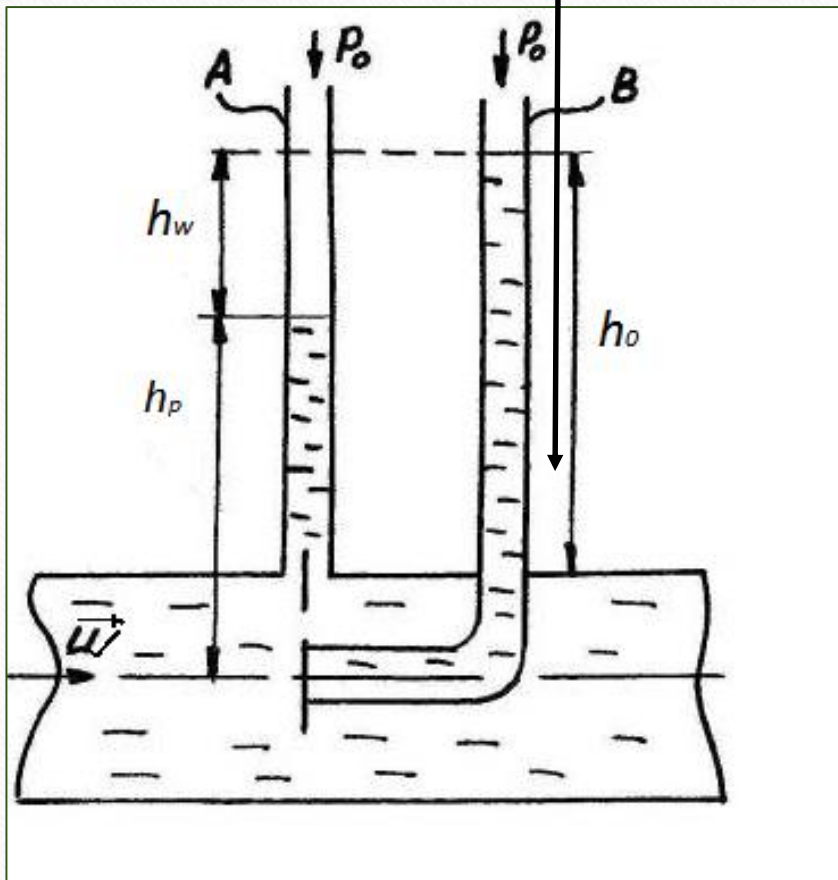
$$p = p_{абс} - p_0 = p_{изб}$$

В движущейся жидкости величина давления зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

Прямой пьезометр воспринимает только статическую составляющую давления. Изогнутый пьезометр (трубка Пито) воспринимает и статическую, и динамическую составляющие давления.



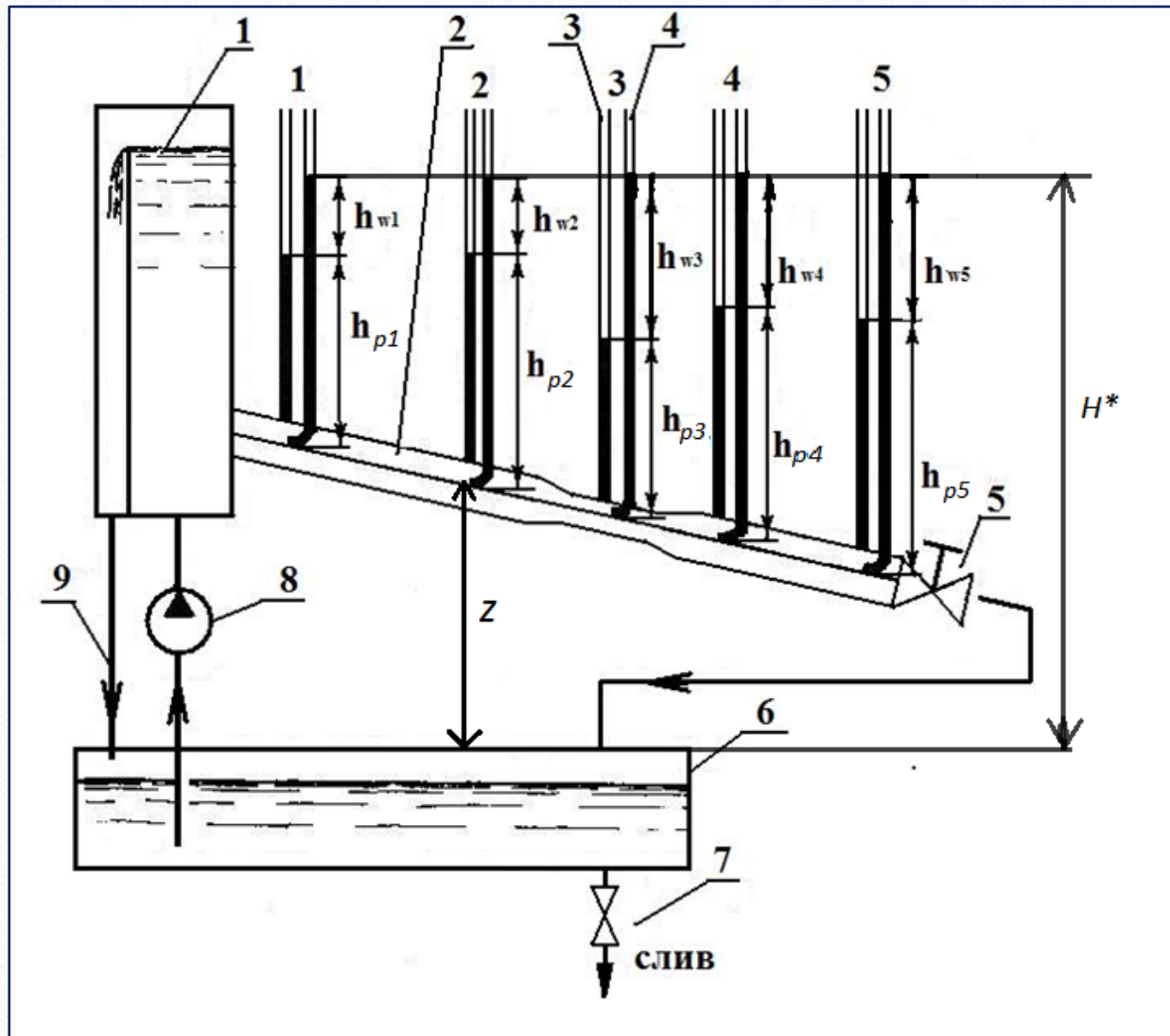
## Измерение составляющих уравнения Бернулли



Скоростную высоту  $h_w = \frac{w^2}{2g}$  можно определить по разнице показаний прямого пьезометра и трубки Пито, у которой площадка, воспринимающая давление, ориентирована перпендикулярно потоку жидкости и, следовательно, на нее действует и гидростатическое давление, и скоростной напор:  $h_w = h_0 - h_p$ , где

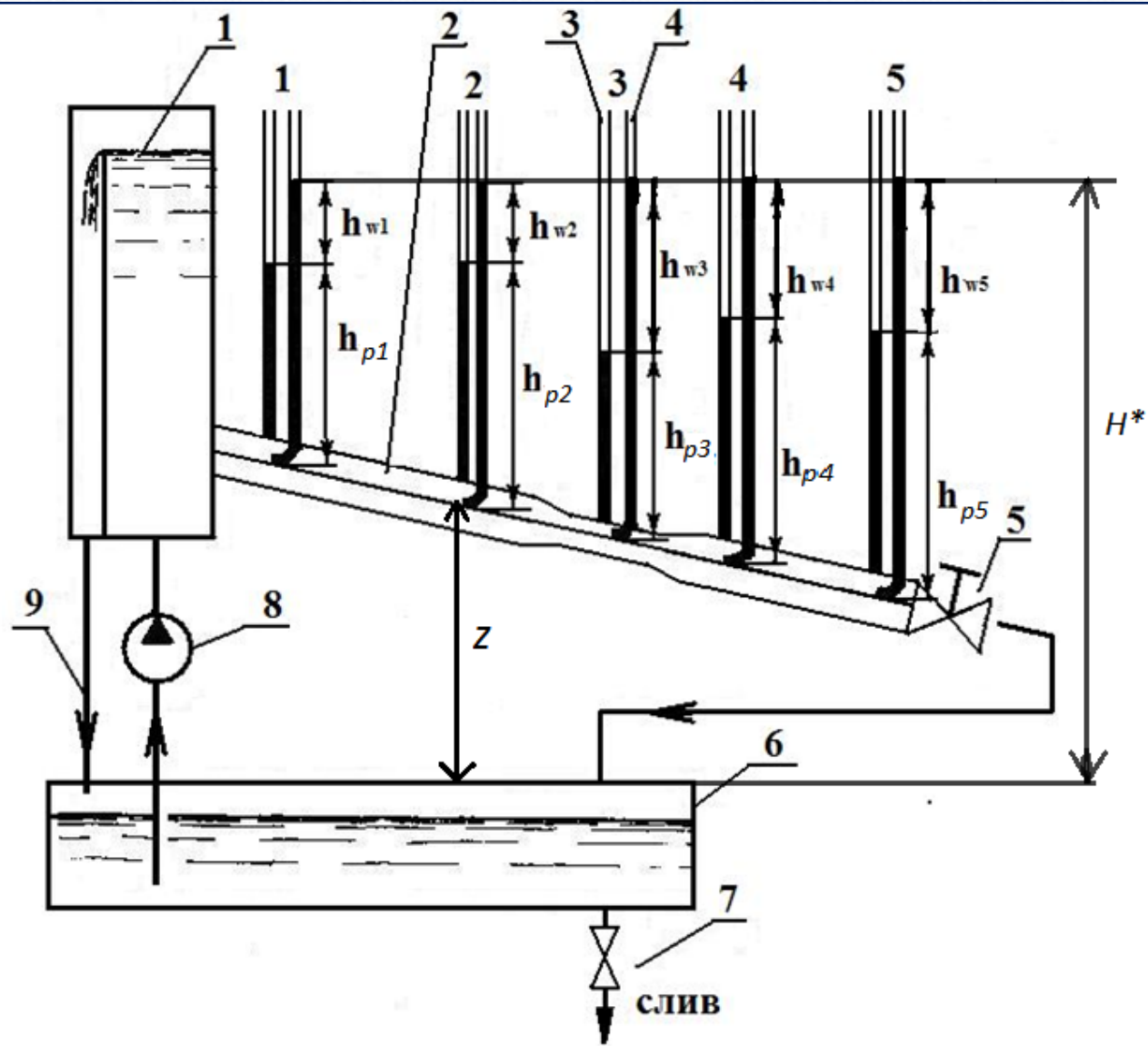
$$h_p = \frac{p}{\rho g}$$

## Измерение составляющих уравнения Бернулли



1. Полный напор  $H^*$  сохраняет своё значение;
  2. Если  $d_1 = d_2$ , то  $w_1 = w_2$
- Во 2-м сечении  $z_2 < z_1$ , поэтому пьезометрическая высота, а значит, и гидростатическое давление жидкости увеличивается, (потенциальная энергия положения переходит в потенциальную энергию давления)



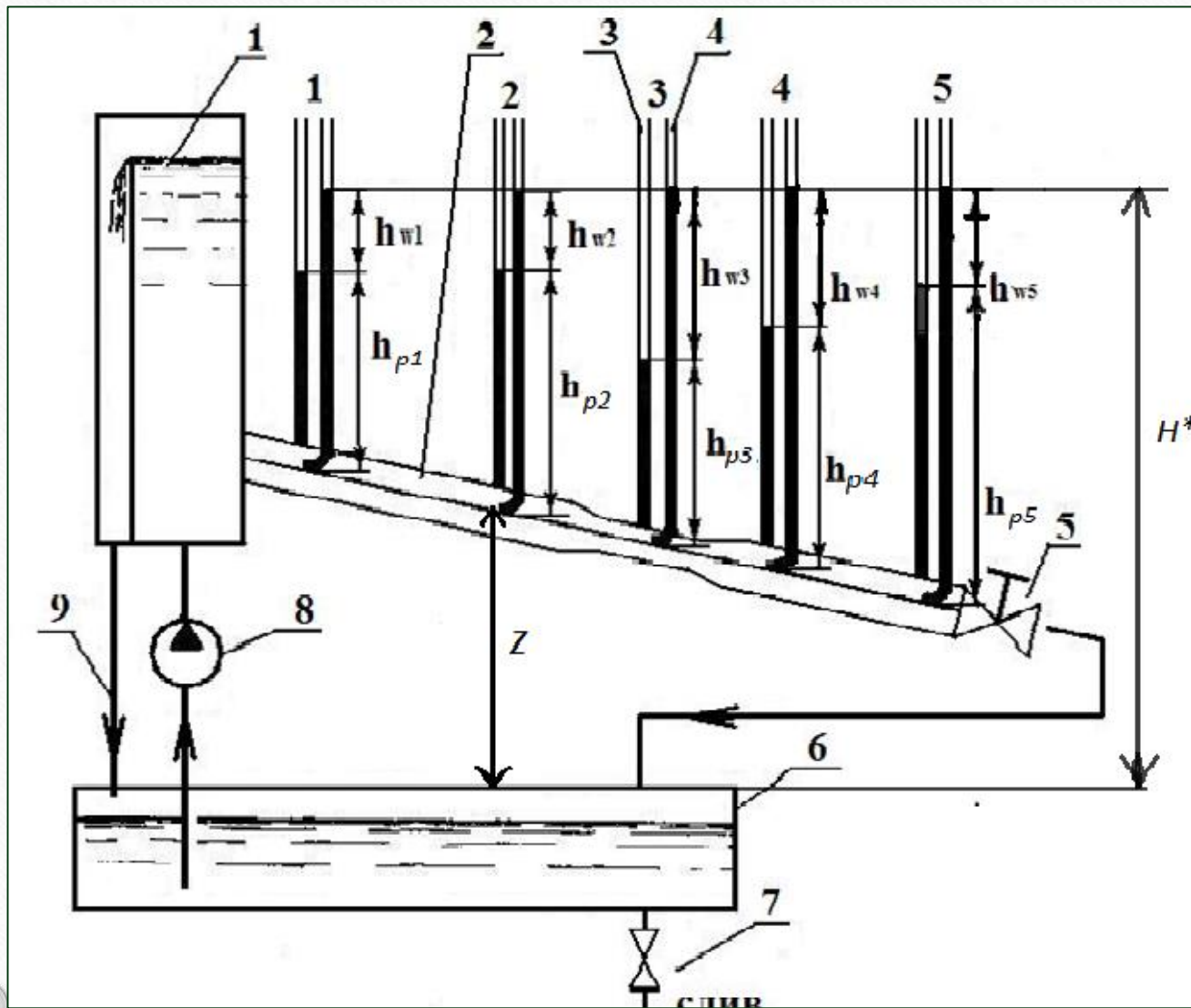


При этом полный напор  $H^*$  сохраняет своё значение;

3. В узком сечении увеличивается скорость потока, а гидростатическое давление жидкости уменьшается, (потенциальная энергия давления переходит в кинетическую энергию) .

**Почему давление уменьшается?**





4. В сечении 4 уменьшается скорость потока, а гидростатическое давление жидкости увеличивается, (кинетическая энергия потока переходит в потенциальную энергию давления); **Почему давление увеличивается?**

5. Нивелирная высота уменьшается - потенциальная энергия положения переходит в потенциальную энергию давления:

$$h_{w5} = h_{w1}, \quad h_{p5} > h_{p1}$$

## **Контрольные вопросы**

1. Какое движение называется стационарным?
2. Какое движение называется нестационарным?
3. Какое движение называется установившимся?
4. Что такое линия тока?
5. Что такое профиль скорости?
6. Какое движение называется плоским?
7. Что такое расход?
8. Что такое местная скорость?
9. Напишите уравнение сплошности в гидравлической форме.



## Глава 5.

# ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Вязкость –это способность жидкостей и газов сопротивляться относительному сдвигу слоёв.**

Согласно гипотезе Ньютона сила вязкого трения прямо пропорциональна градиенту скорости:

$$F = \mu \int_S \frac{\partial w}{\partial n} \cdot dS$$



# ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Касательные напряжения:

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$$

$\mu$  - динамический коэффициент вязкости,  $Па \cdot с$ ,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $м^2/с$  - кинематический коэффициент вязкости

# ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ


Жидкости, подчиняющиеся закону Ньютона, называются **ньютоновскими**. К ним относятся большинство жидкостей и все газы.

Жидкости, не подчиняющиеся закону Ньютона, называются **неньютоновскими**. К ним относятся, например, суспензии, глинистые растворы, масляные краски и др.



## 5.1. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)

Уравнения **Навье-Стокса** выражают 2-й закон Ньютона применительно к потоку вязкой несжимаемой жидкости.


$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dw_x}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x \\ \frac{dw_y}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y \\ \frac{dw_z}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \end{aligned} \right.$$

$$\nabla^2 w_x = \operatorname{div}(\operatorname{grad} w_x) = \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}$$

↑  
оператор Лапласа

$$a_x = \frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z};$$

где  $w_x, w_y, w_z$  - проекции вектора скорости на координатные оси;  
 $\nu, \text{ м}^2/\text{с}$  — кинематический коэффициент вязкости .



## Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Уравнение неразрывности нужно присоединить к системе, чтобы она была замкнута.

## Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)



$$\frac{dw_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x$$

$$\frac{dw_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y$$

$$\frac{dw_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

Уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности полностью описывают движение вязкой несжимаемой жидкости.

Чтобы решение системы уравнений было единственным к ним необходимо поставить начальные и граничные условия.



## Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса)



$$\frac{dw_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x$$

$$\frac{dw_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y$$

$$\frac{dw_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

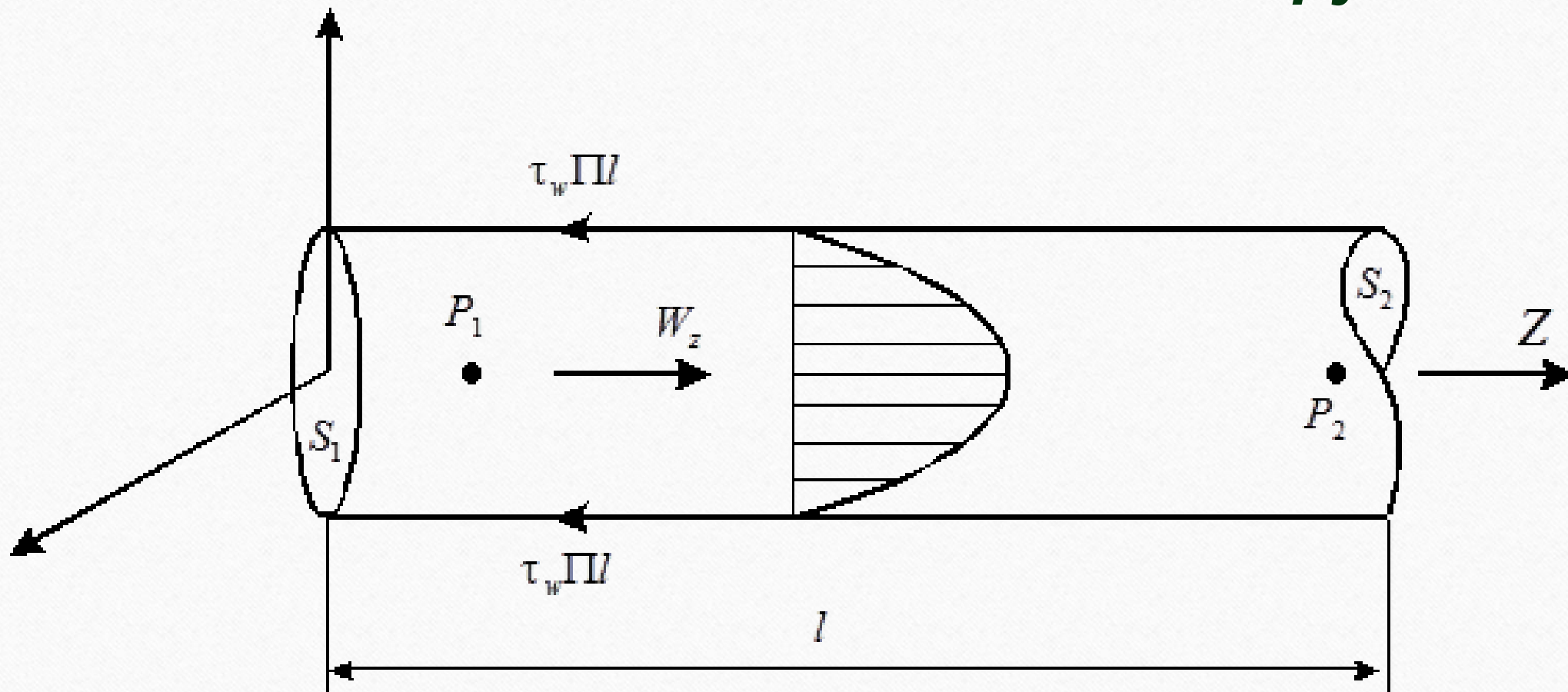
В качестве граничных условий при движении вязкой несжимаемой жидкости часто используют условие «прилипания».

**На твёрдой стенке:**

$$w_x = 0, w_y = 0, w_z = 0.$$



## 5.2. Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах



## ***Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах***


Будем считать трубу бесконечно длинной, движение стационарным и поток направленным вдоль оси трубы так, что составляющие скорости, перпендикулярные оси  $z$ , равны нулю ( $w_x = w_y = 0$ ),  $w = w_z$ .

Пренебрежем действием массовых сил ( $f_x = f_y = f_z = 0$ ),

и будем считать физические свойства жидкости постоянными.

# Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

При таких допущениях уравнения Навье-Стокса и неразрывности упрощаются:


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_x}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x \\ \frac{dw_y}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y \\ \frac{dw_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$



# Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$p=p(z)$ .  $\longrightarrow$  Давление будет меняться при переходе от сечения к сечению, оставаясь неизменным для всех точек данного сечения (т.е. не меняется по высоте).

$$w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \longrightarrow \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$w=w(x,y)$ .  $\longrightarrow$  В любом поперечном сечении трубы распределение скоростей будет одинаковым.

## Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

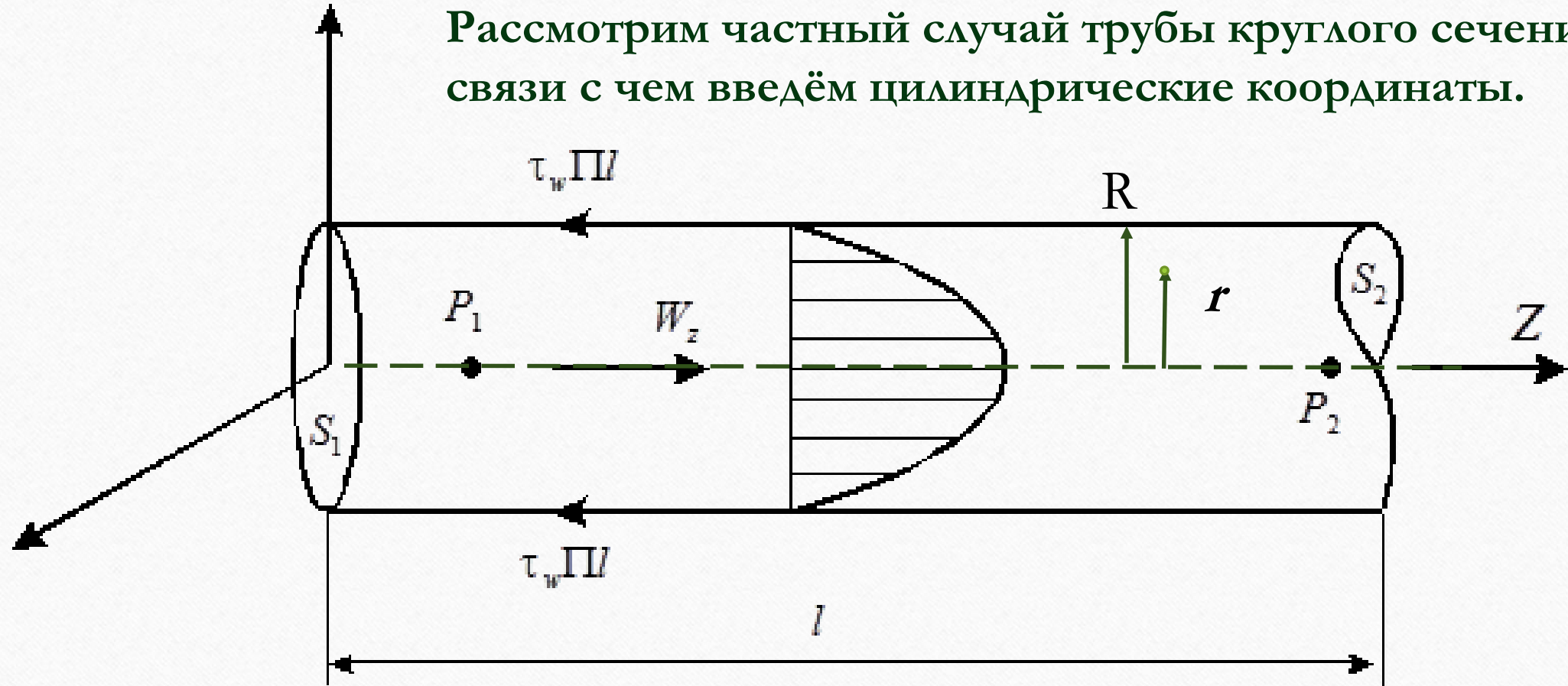
Левая часть этого уравнения зависит только от  $x$  и  $y$ , а правая - только от  $z$ . Это возможно лишь при условии постоянства левой и правой частей по отдельности. Следовательно:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}$$

где  $\Delta p$  - падение давления на участке трубы длиной  $l$ .

# Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

Рассмотрим частный случай трубы круглого сечения, в связи с чем введём цилиндрические координаты.





## **Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах**

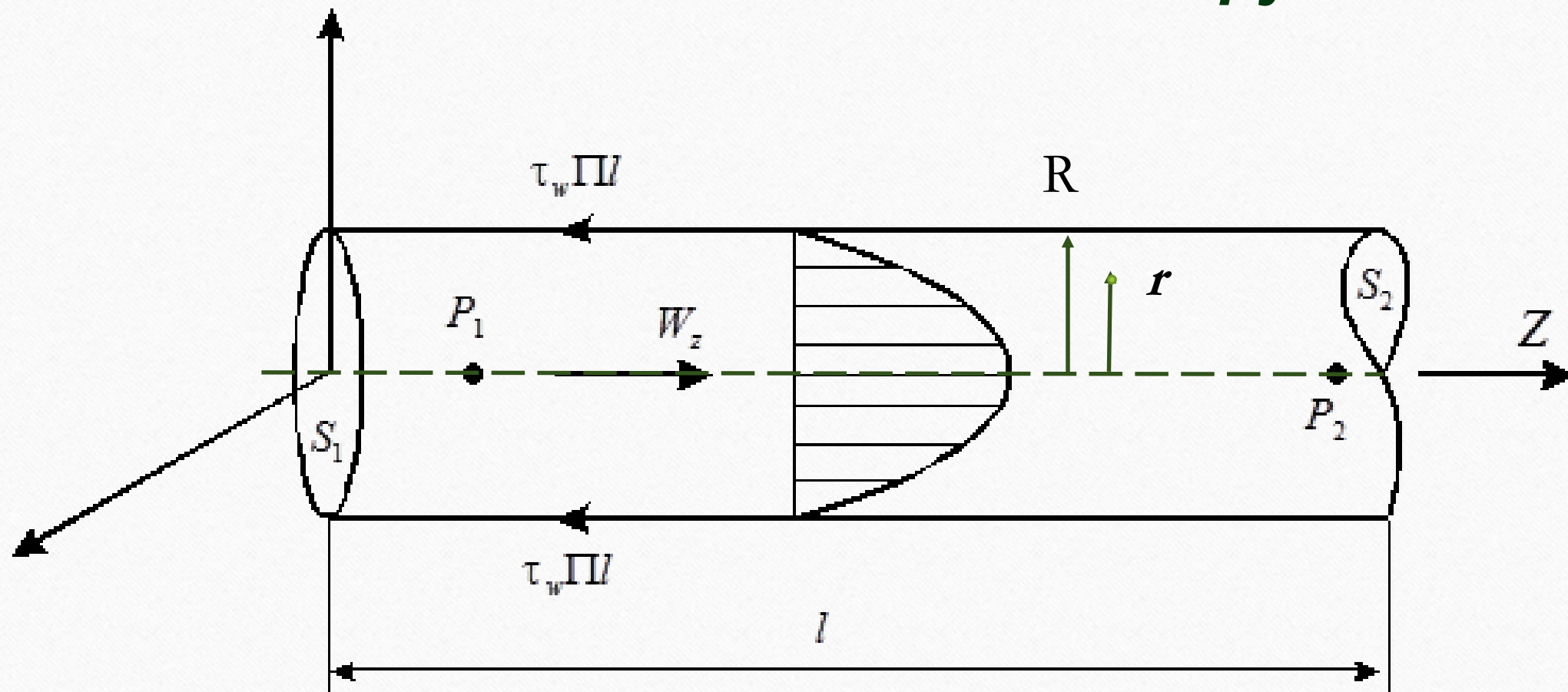
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

Рассмотрим частный случай трубы круглого сечения, в связи с чем перепишем это уравнение в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}$$

с граничным условием:  $w_{r=R} = 0$

# Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах



## Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l} \longrightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l} r \xrightarrow{\int} r \frac{dw}{dr} = -\frac{\Delta p}{\mu l} \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{\Delta p}{\mu l} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \xrightarrow{\int} w = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Учитывая, что  $\ln 0 \rightarrow \infty$ , из условия ограничения скорости на оси трубы ( $r = 0$ ) следует, что:  $C_1 = 0$

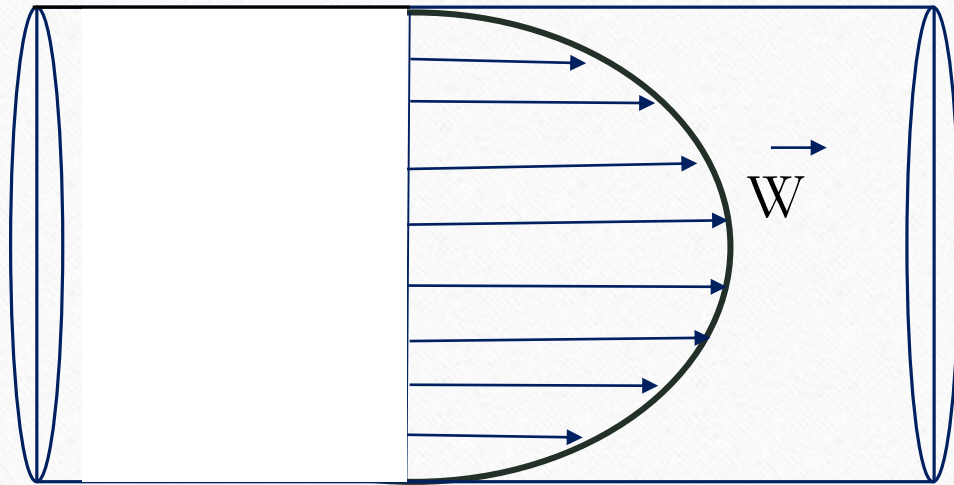
Из условия  $w_{r=R} = 0$  находим:  $C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$

Подставляя константы в общее решение, получим:

$$w = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2 \longrightarrow w = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



## Распределение скоростей имеет параболический вид



$$w = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Профиль скорости в реальной  
жидкости

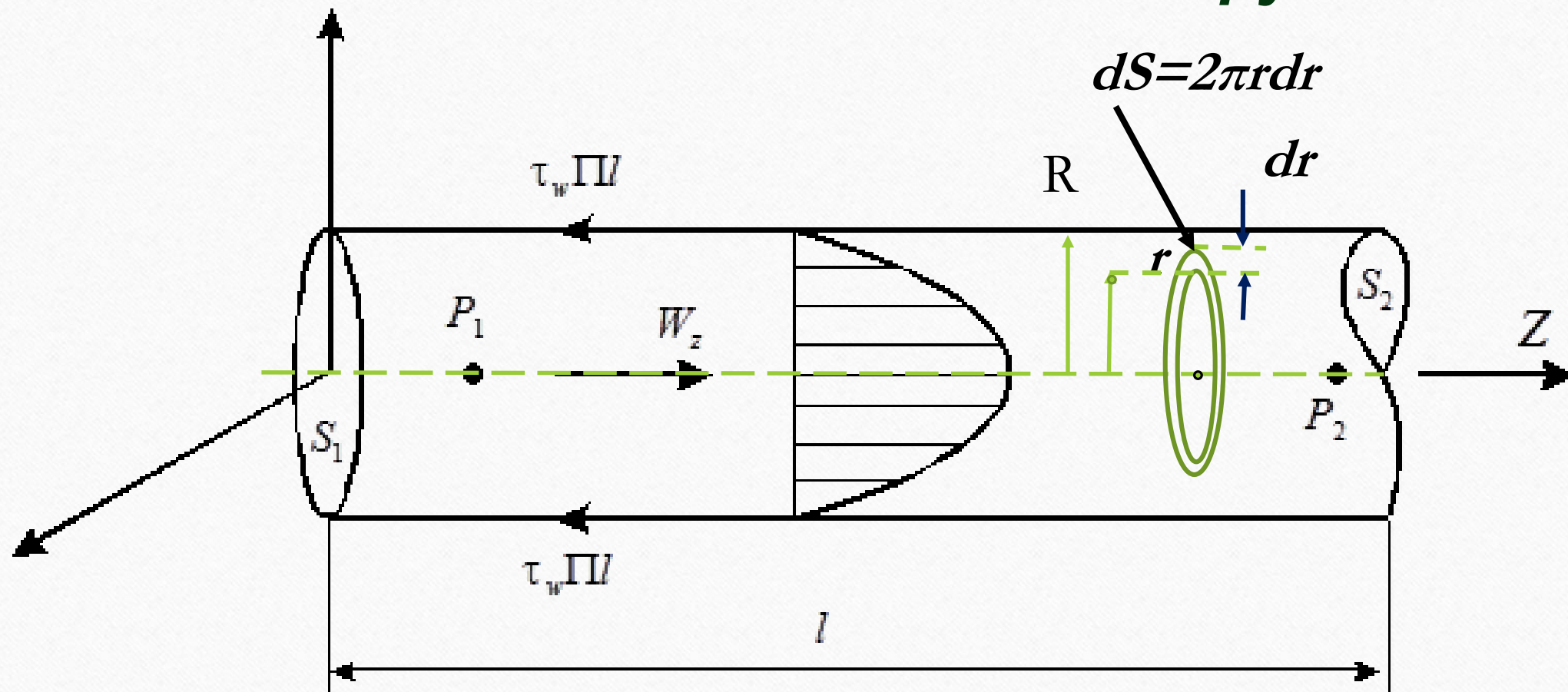
## **Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах**

Распределение скоростей имеет параболический вид с максимальной скоростью :  $w_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}$  на оси трубы ( $r=0$ ) и нулевой скоростью на поверхности стенки ( $r = R$ ).

Определим секундный объемный расход жидкости:

$$Q = \int_S w dS = \int_0^R w_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r \cdot dr = w_{\max} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu l}$$

# Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах





## Решение задачи о ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости в трубах

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \mu l}$$

Закон Пуазейля

Из формулы следует, что расход возрастает пропорционально  $R^4$ , а необходимый для достижения заданного расхода жидкости перепад давления  $\Delta p$  обратно пропорционален четвертой степени диаметра трубы:  $\Delta p = \frac{8 \mu l Q}{\pi R^4}$ .

Средняя скорость движения жидкости в трубе:



$$w_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu l} = \frac{1}{2} w_{max}$$

## 5.3. Гидравлическое сопротивление при ламинарном течении в трубах и каналах



$$w_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{R^2 \Delta p}{8 \mu l}$$

Выразим из этого уравнения перепад давления на участке трубы

длиной  $l$  :

$$\Delta p = \frac{8 \mu l}{R^2} w_{cp} = \frac{64 \mu l}{\rho w_{cp} d^2} \frac{\rho w_{cp}^2}{2} = \frac{64}{Re_{cp}} \frac{l}{d} \frac{\rho w_{cp}^2}{2},$$

Где  $\lambda = \frac{64}{Re_{cp}}$  - коэффициент сопротивления (гидравлического трения),

$Re_{cp} = \frac{\rho w_{cp} d}{\mu}$  - число Рейнольдса по средней скорости потока.



# Понятие об эквивалентном диаметре



$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w_{cp}^2}{2},$$

Перепад давления на участке трубы длиной  $l$  называется **гидравлическим сопротивлением**.

Для приближенной оценки гидравлического сопротивления в прямых трубах некруглого сечения можно считать, что оно равно сопротивлению круглых труб такой же длины и **эквивалентного диаметра**.

$$d_{\text{э}} = \frac{4S}{\Pi}$$

- эквивалентный диаметр,  $\Pi$  – периметр сечения.



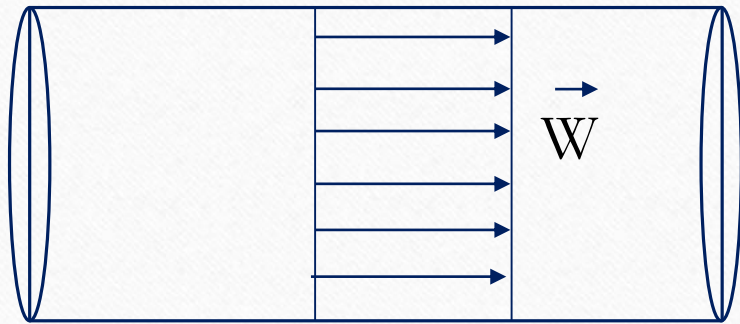
## 5.4. Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах

Для двух произвольных сечений потока **идеальной** жидкости на любой линии тока будет справедливо уравнение:

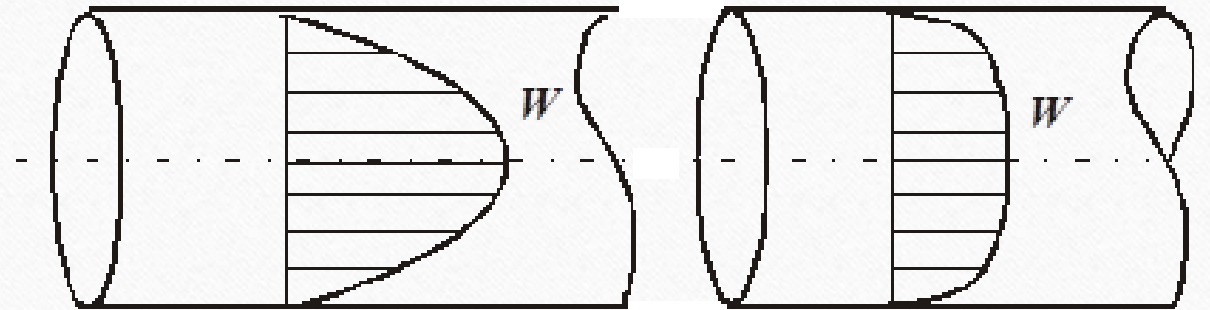
$$\frac{\rho w_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho w_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2$$

Поскольку при движении **реальной** жидкости в канале скорость меняется по высоте канала, то *для каждой линии тока будут свои значения скорости.*

# Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах



Профиль скорости в идеальной жидкости



Профиль скорости в реальной жидкости



## **Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах**

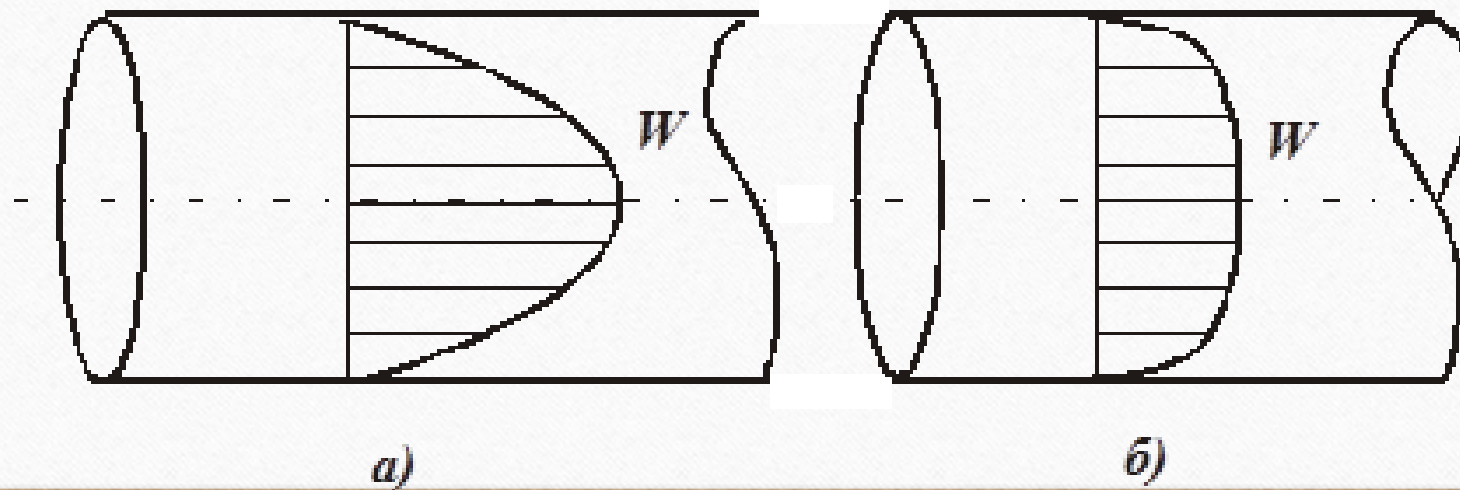
Поэтому в уравнении Бернулли переходят от местной к *средней скорости потока*. Однако, кинетическая энергия потока, определённая по средней скорости потока  $E_{k_{cp}}$ , *не равна реальной кинетической энергии потока*  $E_k$ . Поэтому при переходе от местной к средней скорости потока вводится поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность профиля скорости:

$$\alpha = \frac{E_k}{E_{k_{cp}}}$$



## Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах

Для невязкой (идеальной) жидкости  $w_{cp} = w$ , и  $\alpha = 1$ . Во всех других случаях  $\alpha > 1$ . Для ламинарного потока (а) в круглой трубе  $\alpha = 2$ . Для турбулентного режима (б)  $\alpha < 1,5$  и приближается к 1 с увеличением числа Re.



## **Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах**

По ходу движения вязкой жидкости полная энергия потока частично затрачивается на трение между частицами самой жидкости, на трение о стенки канала и на преодоление местных препятствий на пути потока (местных гидравлических сопротивлений).

Потери энергии в потоке реальной жидкости проявляются в снижении полного напора  $p^*$ , а, следовательно, и гидравлической высоты  $H^*$ .

В уравнении Бернулли такое снижение полной энергии потока между двумя сечениями 1 и 2 учитывается членом  $\Delta p_{1-2}$



## Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах

$$\alpha_1 \frac{\rho w_{cp1}^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \alpha_2 \frac{\rho w_{cp2}^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{1-2} \quad , \text{ Па}$$

ИЛИ

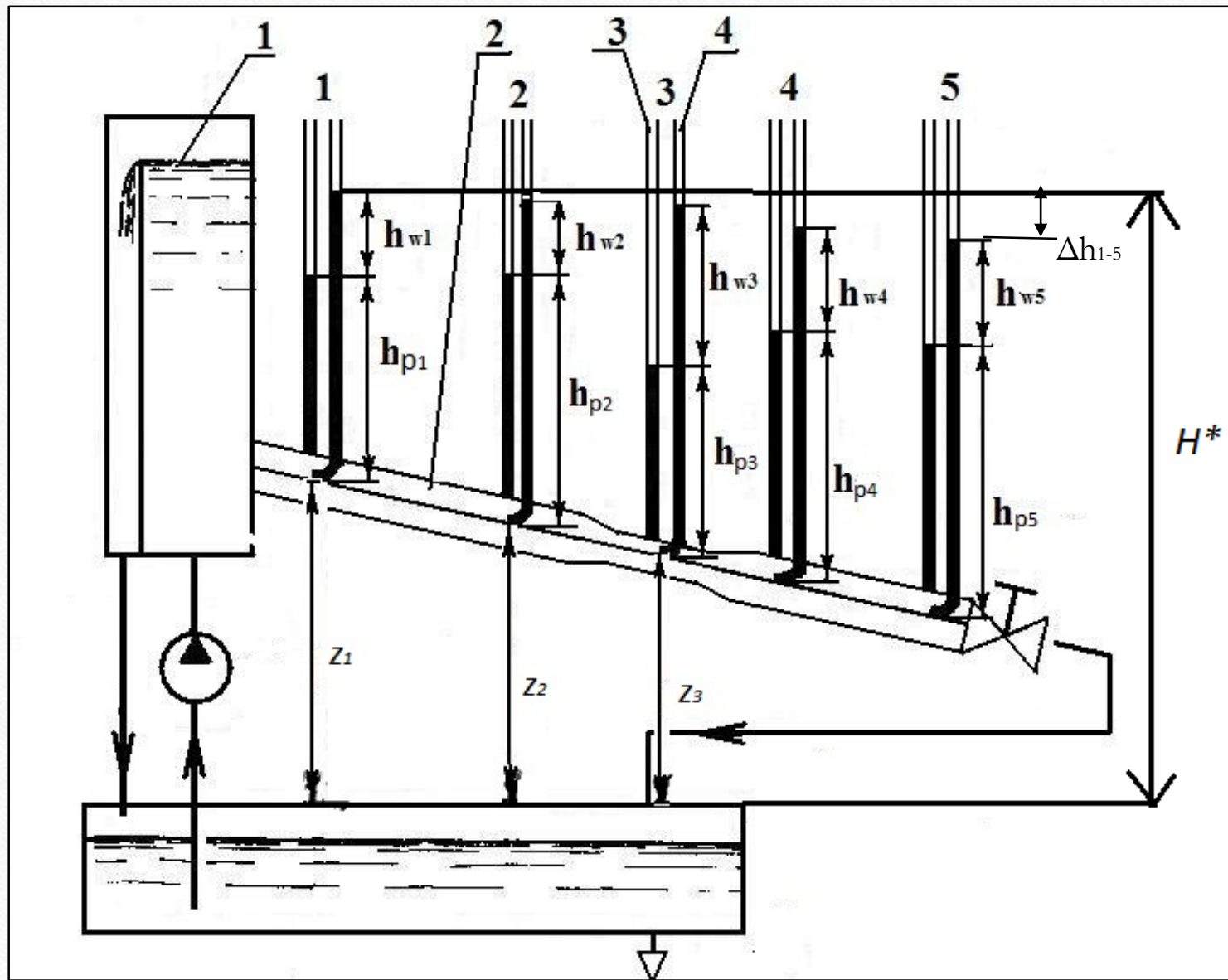
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{w_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{w_{cp2}^2}{2g} + \Delta h_{1-2} \quad , \text{ М}$$

Величина  $\Delta p_{1-2} = p_1^* - p_2^*$  (или  $\Delta h_{(1-2)}$ ) - называется гидравлическими потерями на участке между сечениями 1 и 2. Следовательно, гидравлические потери – это разность полных напоров между двумя сечениями потока.



## Уравнение Бернулли

Полный напор  $H^*$  уменьшается вниз по потоку на величину гидравлических потерь.



## Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1-3:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{w_{cp1}^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \alpha_3 \frac{w_{cp3}^2}{2g} + \Delta h_{(1-3)}$$

Из уравнения сплошности:  $S_1 w_1 = S_3 w_3 \longrightarrow w_1 < w_3$

$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + (z_1 - z_3) - \alpha \left( \frac{w_{cp3}^2}{2g} - \frac{w_{cp1}^2}{2g} \right) - \Delta h_{(1-3)}$$

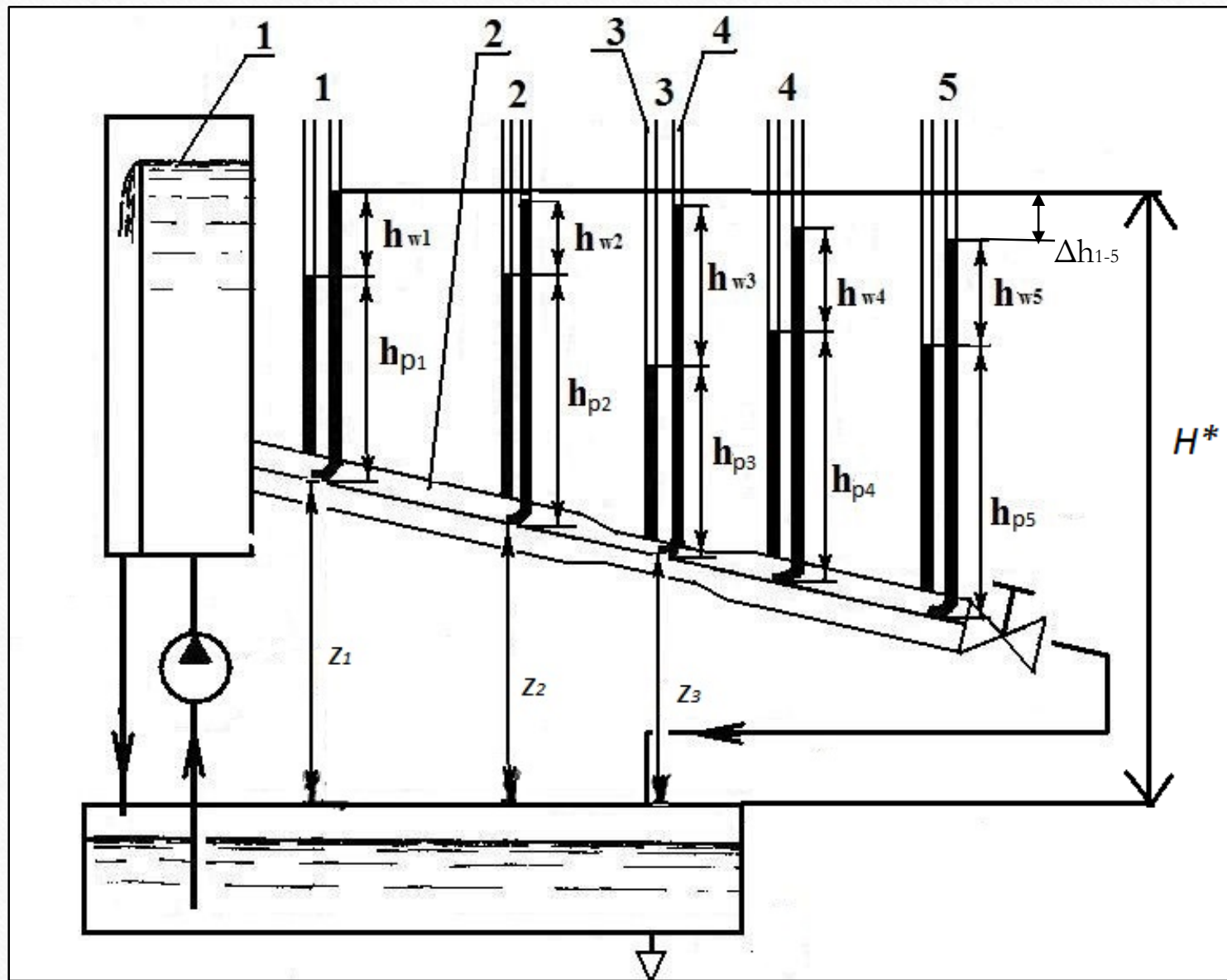
Если  $z_1 = z_3$ , то

$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} - \alpha \left( \frac{w_{cp3}^2}{2g} - \frac{w_{cp1}^2}{2g} \right) - \Delta h_{(1-3)}$$



## Уравнение Бернулли

Между 1 и 3 сечениями часть потенциальной энергии давления потока переходит в кинетическую энергию, а часть безвозвратно теряется на преодоление сопротивлений  $\Delta h_{1-3}$ . При этом часть потенциальной энергии положения переходит в потенциальную энергию давления.





## Уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах

Запишем уравнение Бернулли для сечений 3-4:

$$z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \alpha \frac{w_{cp3}^2}{2g} = z_4 + \frac{p_4}{\rho g} + \alpha \frac{w_{cp4}^2}{2g} + \Delta h_{(3-4)}$$

Из уравнения сплошности:  $S_3 w_3 = S_4 w_4 \longrightarrow w_4 < w_3$

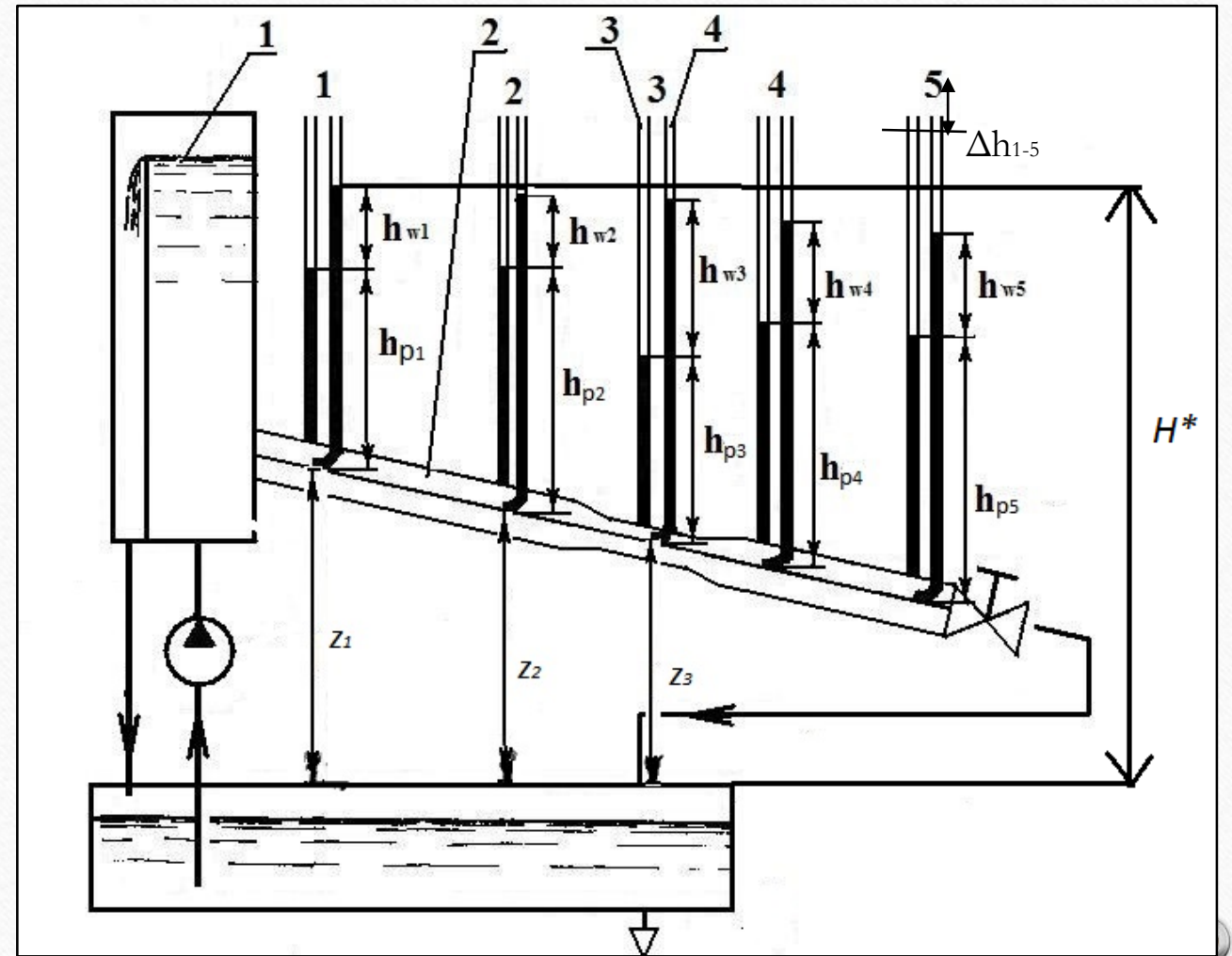
$$\frac{p_4}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} + (z_3 - z_4) + \alpha \left( \frac{w_{cp3}^2}{2g} - \frac{w_{cp4}^2}{2g} \right) - \Delta h_{(3-4)}$$

Если  $z_4 = z_3$ , то

$$\frac{p_4}{\rho g} = \frac{p_3}{\rho g} + \alpha \left( \frac{w_{cp3}^2}{2g} - \frac{w_{cp4}^2}{2g} \right) - \Delta h_{(3-4)}$$

## Уравнение Бернулли

Между 3 и 4 сечениями кинетическая энергия потока переходит в потенциальную энергию давления, при этом часть потенциальной энергии положения также переходит в потенциальную энергию давления. Между 2 и 4 сечениями часть энергии давления затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений  $\Delta h_{2-4}$ , поэтому  $h_{p4} \neq h_{p2}$  даже для горизонтальной трубы.





## 5.5. Подобие гидромеханических потоков. Критерии подобия

### Определения

*Два физических явления подобны, если все характеризующие их однородные параметры в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени пропорциональны или связаны преобразованием подобия:*

$$\varphi_2(x_2; \tau_2) = \varphi_2(c_l x_1; c_\tau \tau_1) = c_\varphi \varphi_1(x_1; \tau_1)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — однородные параметры подобных процессов;  $c_l, c_\tau, c_\varphi$  — константы подобия.



# Основы теории подобия

*Подобные процессы описываются одинаковыми уравнениями и отличаются только масштабом описывающих их величин.*

Для того чтобы два физических процесса были подобными, необходимо соблюдение условий геометрического, кинематического, временного, температурного и физического подобия, подобия сил, а также подобия начальных и граничных условий.

## Основы теории подобия

**Временное подобие** означает пропорциональность времен развития процессов:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = c_\tau = \text{const} \quad \text{— константа временного подобия.}$$

**Кинематическое подобие** подразумевает одинаковую форму линий тока и пропорциональность скоростей:

$$\frac{w_{x_2}}{w_{x_1}} = \frac{w_{y_2}}{w_{y_1}} = \frac{w_{z_2}}{w_{z_1}} = c_w = \text{const} \quad \text{— константа скоростного подобия.}$$

**Физическое подобие** означает пропорциональность физических свойств во всех точках:  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_2}{v_1} = c_v$

# Основы теории подобия

**Подобие сил** означает пропорциональность действующих сил:

$$\frac{f_2}{f_1} = c_f ; \quad \frac{p_2}{p_1} = c_p$$

**Температурное подобие** означает пропорциональность температур во всех точках:

$$\frac{t_2}{t_1} = c_t$$

$c_t$  — константа температурного подобия.



# Основы теории подобия

Между константами подобия существуют соотношения, называемые индикаторами подобия, которые определяются из анализа уравнений (физических законов), которыми описываются исследуемые подобные процессы.

Если константы подобия выразить через параметры двух процессов и подставить в индикаторы подобия, можно получить выражения для *чисел подобия*. Анализ уравнений Навье-Стокса позволяет установить индикаторы и *числа гидромеханического подобия*.

## Числа гидромеханического подобия

Но  $= \frac{w\tau}{l} = \text{idem}$  - число гомохронности представляет собой безразмерное время развития или проявления процесса.

Обратная величина  $Sh = \frac{l}{w \cdot \tau}$  число Струхала — показывает соотношение сил инерции, вызванных локальными и конвективными ускорениями.

Число Фруда  $Fr = \frac{gl}{w^2} = \text{idem}$

характеризует соотношение потенциальной энергии в поле сил тяжести и кинетической энергии в потоке.



## Числа гидромеханического подобия

Число Эйлера:  $E_u = \frac{p}{\rho w^2} = idem$

показывает соотношение потенциальной энергии сил давления и кинетической энергии потока.

Или в виде  $E_u = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$  показывает соотношение гидравлических потерь (перепада давления  $\Delta p$ ) и динамического напора  $\rho w^2$ .

Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{wl}{\nu} = idem$$

показывает соотношения сил инерции и сил вязкого трения.



## Числа гидромеханического подобия

Во всех числах подобия величины  $w$  и  $\tau$  — характерная скорость и характерное время развития процесса.

Линейная величина  $l$  называется характерным размером.

*Характерный размер* – это размер, наиболее существенно влияющий на распределение скоростей в потоке жидкости или газа.

Все числа подобия - *безразмерные величины*.

**Первая теорема подобия:**

*Подобные процессы имеют одинаковые числа подобия.*

## Основы теории подобия

**Вторая теорема подобия:**

*Закон физического процесса может быть выражен математической зависимостью между соответствующими числами подобия.*

Результаты опытов, поставленных на моделях, обрабатываются и представляются в виде так называемых критериальных уравнений, то есть математических зависимостей между определяющими и определяемыми критериями подобия.

Например,  $E_{ii} = C \cdot Re^m$  где  $C$  и  $m$  – константы, определяемые экспериментально.



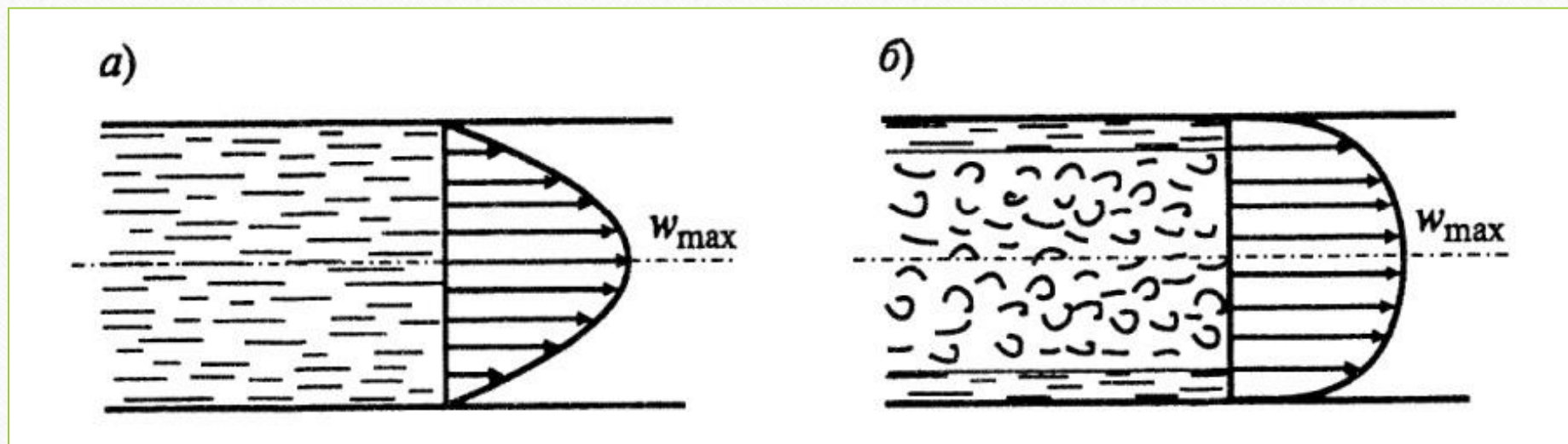
## **5.6. Режимы движения вязкой среды**

**Ламинарным** называется движение, при котором слои жидкости или газа не перемешиваются и перемещаются параллельно друг другу.

**Турбулентным** называется движение, при котором частицы жидкости или газа движутся хаотично, происходит перемешивание слоев, значения скорости, давления и плотности пульсируют относительно некоторых средних по времени значений.



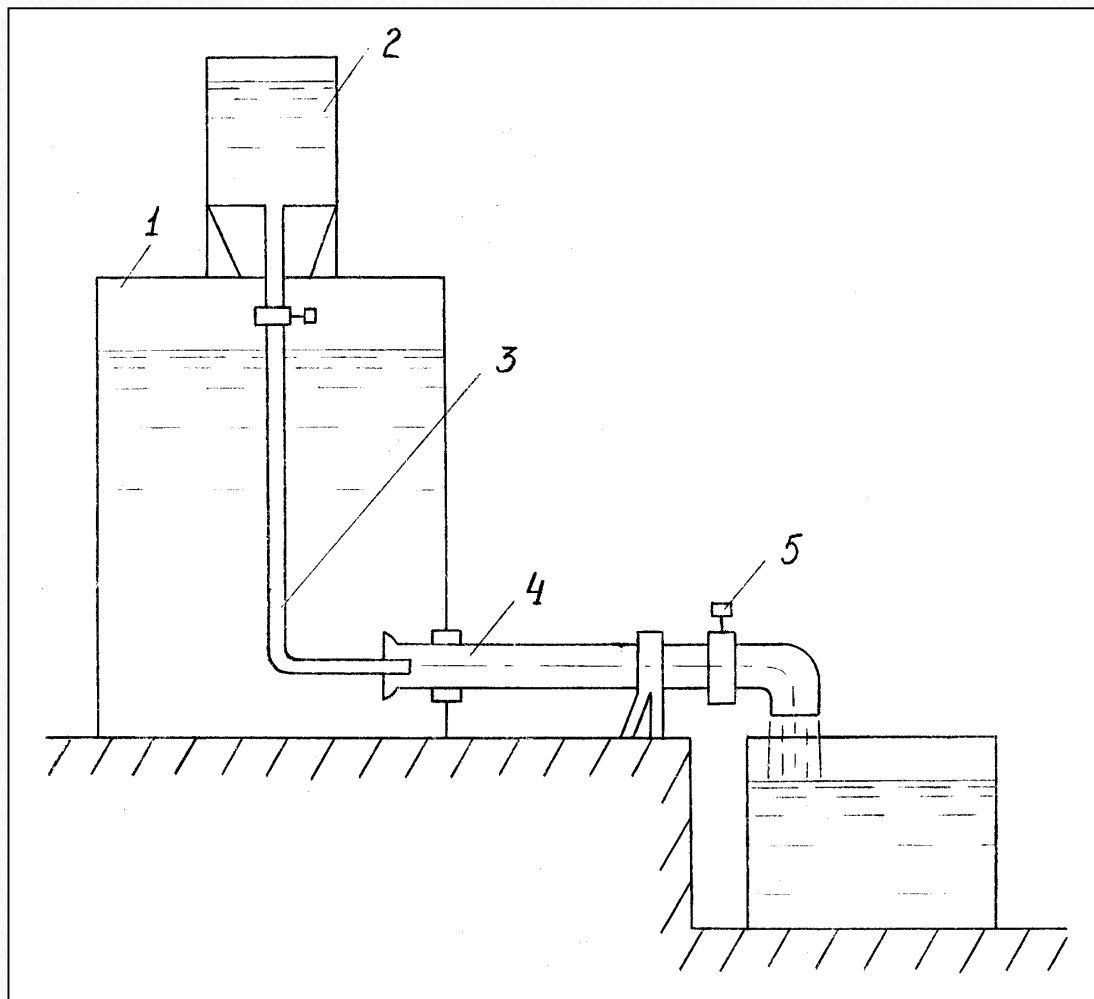
# Режимы движения вязкой среды



Распределение векторов скорости в вынужденных потоках жидкости в круглой прямой трубе

а) при ламинарном движении; б) при турбулентном движении

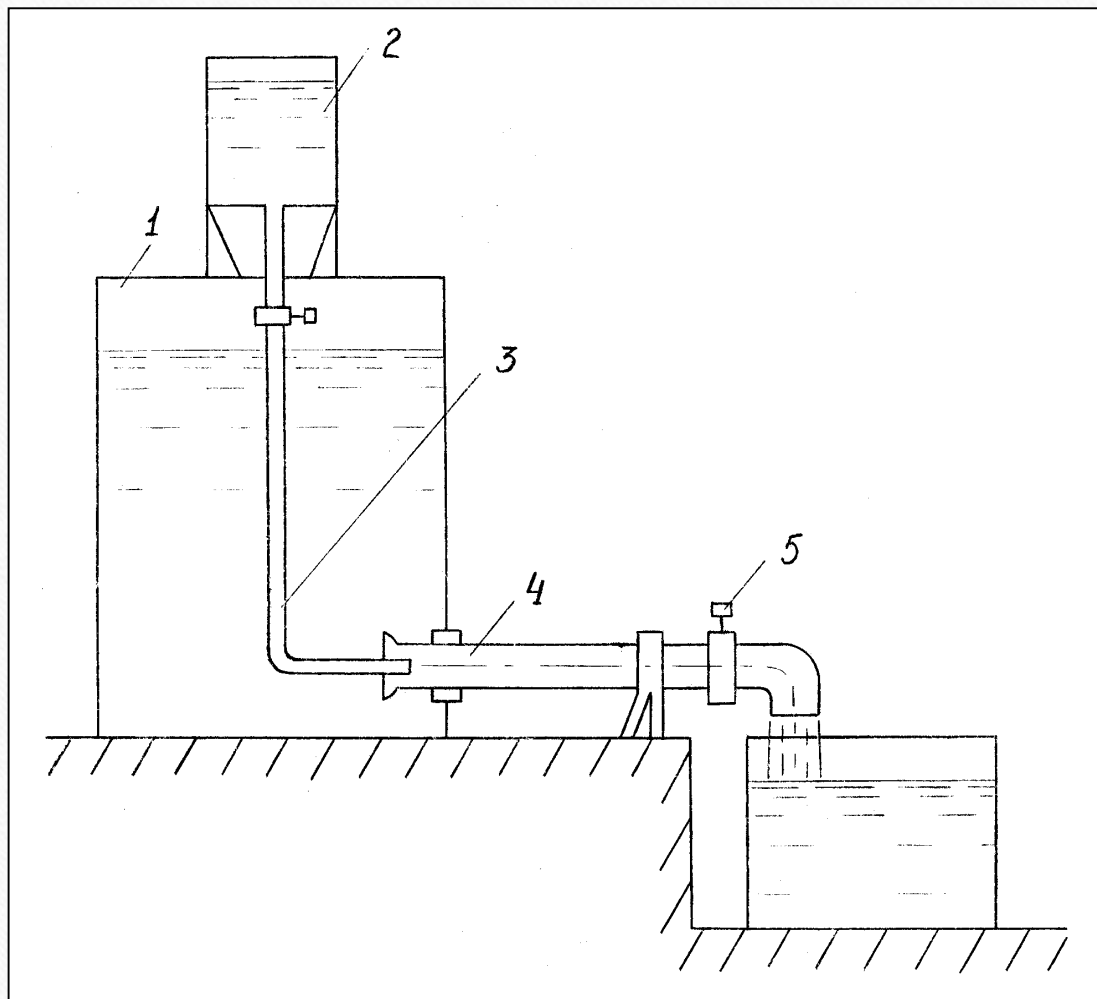
## Режимы движения вязкой среды



Из резервуара 1 под постоянным напором прозрачная жидкость движется по стеклянной трубке 4, на конце которой установлен кран 5, позволяющий регулировать скорость жидкости в трубке. Из отдельного бачка 2 в трубку 3 подводится подкрашенная жидкость, по характеру движения которой определяют режим движения жидкости в этой трубке.



## Режимы движения вязкой среды



При малых скоростях жидкости в трубке подкрашенная жидкость движется отдельно ярко выраженной струйкой, *не перемешиваясь* со всей остальной жидкостью. Такой режим движения жидкости является *ламинарным*.



## Режимы движения вязкой среды

При увеличении скорости до некоторого значения  $w'_{cp_{кр}}$  (верхняя критическая скорость) впускаемая в трубку подкрашенная жидкость перемешивается с остальной, и вся жидкость в трубке окрашивается. *Ламинарный режим течения переходит в турбулентный.*

При дальнейшем увеличении скорости турбулентный режим сохраняется. Если затем скорость в трубке уменьшается, то при некотором значении  $w''_{cp_{кр}}$  (нижняя критическая скорость) *турбулентный режим переходит в ламинарный.*

При дальнейшем уменьшении скорости ламинарный режим будет сохраняться.

Оказывается, что  $w''_{cp_{кр}} < w'_{cp_{кр}}$ .

## Режимы движения вязкой среды

Таким образом, существуют критические скорости жидкости в трубке, при которых один режим движения переходит в другой. Значения критических скоростей в заданных условиях проведения опыта для конкретной жидкости и неизменном уровне внешних возмущений постоянны.

При изменении уровня внешних возмущений, например при наличии вибрации или ударов по трубке, значение  $w'_{cp_{кр}}$  может значительно изменяться. На значение  $w''_{cp_{кр}}$  эти возмущения практически не влияют.



## Режимы движения вязкой среды

При  $w_{cp} > w'_{cp_{кр}}$  - режим турбулентный;

При  $w_{cp} < w''_{cp_{кр}}$  - режим ламинарный,

При  $w''_{cp_{кр}} < w_{cp} < w'_{cp_{кр}}$  - режим переходный.

Значения критических скоростей в заданных условиях проведения опыта для конкретной жидкости и неизменном уровне внешних возмущений постоянны.

Значения *критических скоростей*, зависят от *вязкости и плотности жидкости, от формы и размеров живого сечения потока, от шероховатости стенок канала и от уровня внешних возмущений.*



## Режимы движения вязкой среды

В качестве универсального критерия, позволяющего определить режим движения жидкости в различных случаях, применяется число (критерий) Рейнольдса:

$Re = \frac{wl\rho}{\mu} = \frac{wl}{\nu}$   
 $Re'_{кр} = \frac{w'_{кр}l}{\nu}$  - верхнее критическое число Рейнольдса – переход из ламинарного режима в турбулентный;

$Re''_{кр} = \frac{w''_{кр}l}{\nu}$  - нижнее критическое число Рейнольдса – переход из турбулентного режима в ламинарный;

## Режимы движения вязкой среды

при  $Re > Re'_{кр} = \frac{w'_{кр} l}{\nu}$  - турбулентный режим;

при  $Re < Re''_{кр}$  - ламинарный режим;

при  $Re''_{кр} < Re < Re'_{кр}$  - переходный режим.

Опыты показывают, что значения нижних критических чисел Рейнольдса  $Re''_{кр}$  устойчивы, а верхних - неустойчивы.

Поэтому за *критическое значение* принимают *нижнее* число Рейнольдса.

Для круглых гладких труб  $Re''_{кр} = \frac{w_{ср_{кр}} \cdot d}{\nu} \approx 2300$  независимо от рода жидкости и диаметра труб.



# **Режимы движения вязкой среды в трубах и каналах**

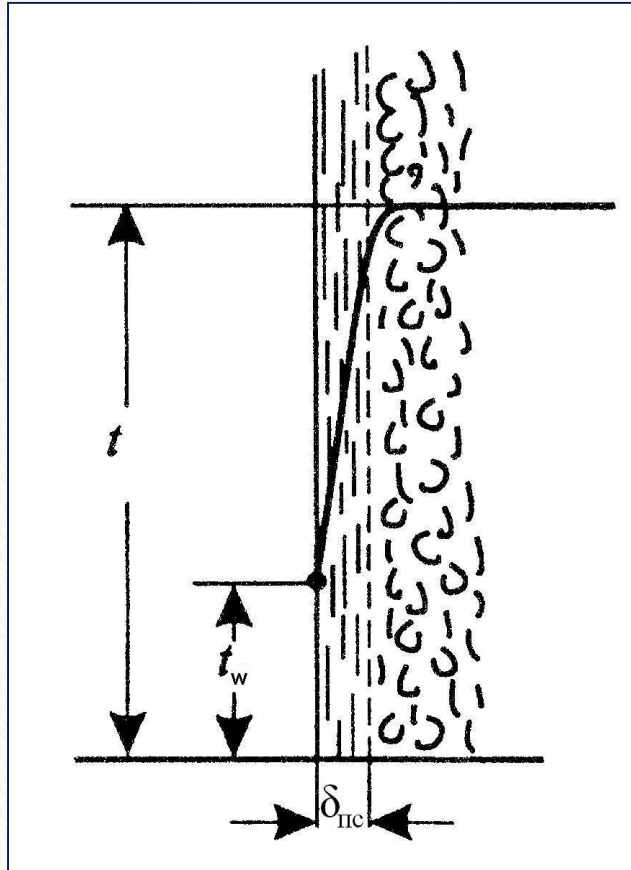
При  $Re < 2300$  - режим ламинарный,

При  $2300 \leq Re \leq 4000 - 10000$  - режим переходный.

При  $Re > 4000 - 10000$  - режим турбулентный.

# 5.7. Основы теории пограничного слоя

## 5.7.1. Понятие пограничного слоя

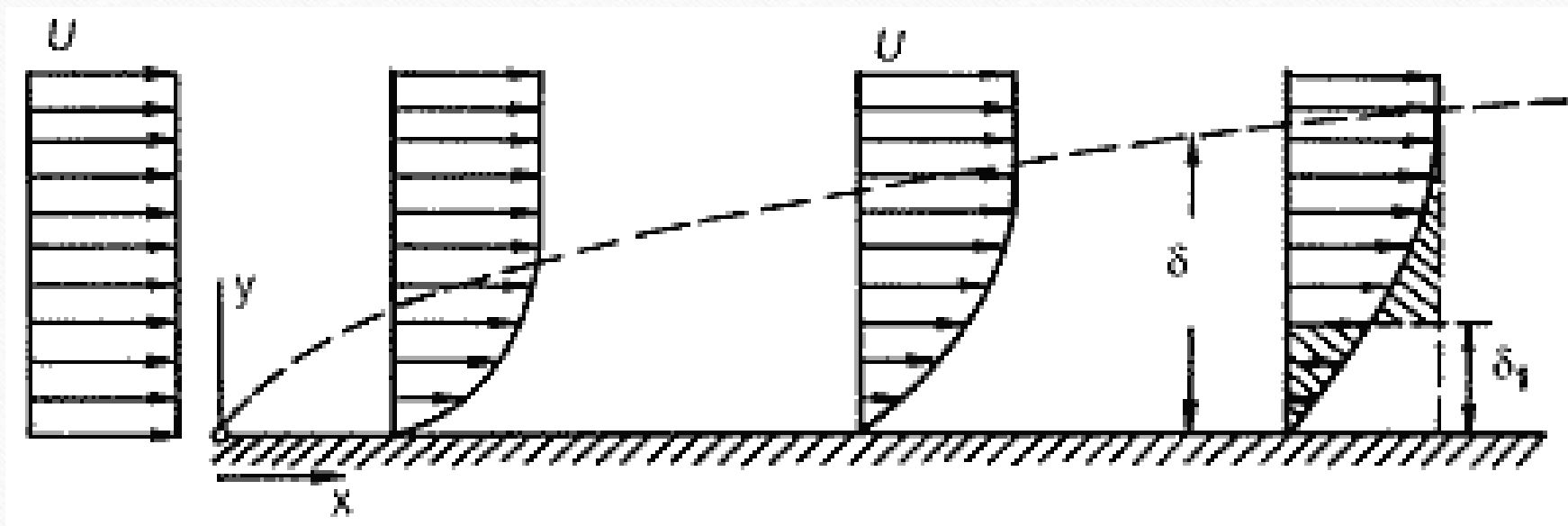


**Пограничным слоем** называется тонкий слой жидкости или газа, в котором параметры процесса меняются от значений на стенке до значений в основном потоке.



# Гидродинамический пограничный слой

Гидродинамическим пограничным слоем называется тонкий слой жидкости или газа, в котором скорость меняется от нуля на стенке до значений в основном потоке.



## Гидродинамический пограничный слой

Толщина пограничного слоя тем больше, чем больше вязкость среды. В связи с резким изменением скорости по толщине пограничного слоя касательное напряжение

$$\tau = \mu \frac{dw}{dn} \quad - \text{оказывается весьма значительным,}$$

*даже при небольших значениях коэффициента вязкости, тогда как вне пограничного слоя касательное напряжение обычно мало.*



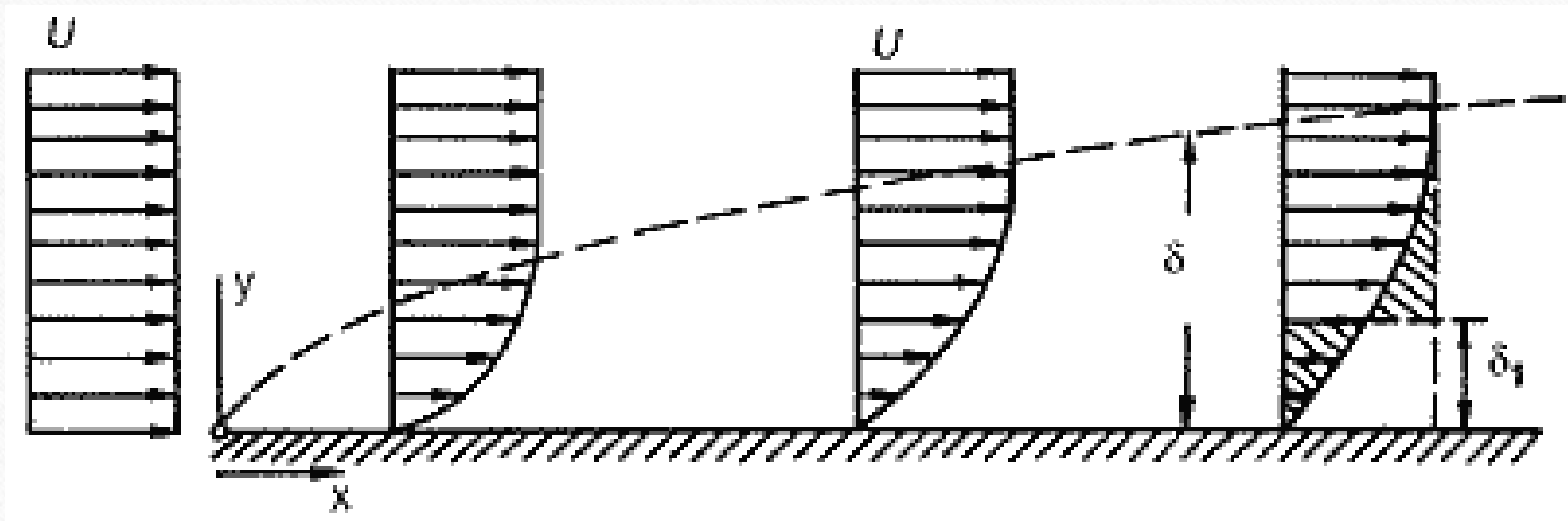
## Гидродинамический пограничный слой

Поэтому при теоретическом исследовании течений с малой вязкостью (большим числом  $Re$ ) можно разделять поток на пограничный слой, где *необходимо учитывать силы вязкости*, и область *вне пограничного слоя*, где с достаточной степенью точности течение может быть описано уравнениями для *идеальной жидкости*.

Такой прием значительно упрощает теоретические исследования движения жидкостей с большими числами  $Re$  (малой вязкостью).

# Гидродинамический пограничный слой

Изменение скорости потока от нуля на стенке до значения во внешнем потоке происходит асимптотически.





## Толщина пограничного слоя

За *толщину пограничного слоя* принимают такое расстояние от стенки, на котором скорость в пограничном слое равна скорости в той же точке внешнего (идеального) потока с заданной степенью точности.

Например, за внешнюю границу пограничного слоя можно принять геометрическое место точек, в которых скорость отличается от скорости идеального обтекания на 1%.

## Свойства плоских стационарных ламинарных пограничных слоев:

1) Относительная толщина пограничного слоя обратно пропорциональна квадратному корню из числа Рейнольдса

потока:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ul}}$$

где  $\delta$  - толщина пограничного слоя;

$l$  - характерный размер течения;

$U$  - продольная скорость во внешнем потоке.

## Свойства плоских стационарных ламинарных пограничных слоев:

Следовательно,  
чем больше число Рейнольдса, тем тоньше пограничный слой.

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ul}}$$



## Свойства плоских стационарных ламинарных пограничных слоев:

2) Поперечная составляющая скорости в области пограничного слоя имеет тот же относительный порядок, что и толщина слоя :

$$\frac{w_y}{w_x} = \frac{\delta}{l} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

где  $w_x$ ,  $w_y$  – продольная и поперечная составляющие скорости в пограничном слое.

*Поперечная составляющая скорости в пограничном слое мала по сравнению с продольной составляющей.*

## Свойства плоских стационарных ламинарных пограничных слоев:

3) Во всех точках перпендикулярного к поверхности тела сечения пограничного слоя давление имеет одно и то же значение. Его можно принять равным давлению на внешней границе пограничного слоя, которое определяется течением внешнего невязкого потока.

Следовательно, **давление в плоском пограничном слое является функцией только продольной координаты.**

## 5.7.2. Уравнения пограничного слоя (уравнения Прандтля)

С учетом второго и третьего свойств пограничного слоя уравнения Навье-Стокса для *плоского* пограничного слоя преобразуются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$



## Уравнения пограничного слоя (уравнения Прандтля)

Если скорость внешнего течения  $U(x)$  — заданная функция, то перепад давления в продольном направлении пограничного слоя может быть определен из уравнения Бернулли:

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const.}$$

С другой стороны, внешнее идеальное течение описывается уравнениями движения Эйлера. Поскольку движение плоское, стационарное, и во внешнем течении градиент скорости в направлении перпендикулярном к стенке мал  $\frac{\partial U}{\partial y} \approx 0$ , из проекции уравнения Эйлера на ось  $x$  получим:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

## Уравнения пограничного слоя (уравнения Прандтля)

Подставляя полученное выражение в уравнения Навье-Стокса для *плоского* пограничного слоя получим **уравнения Прандтля**:

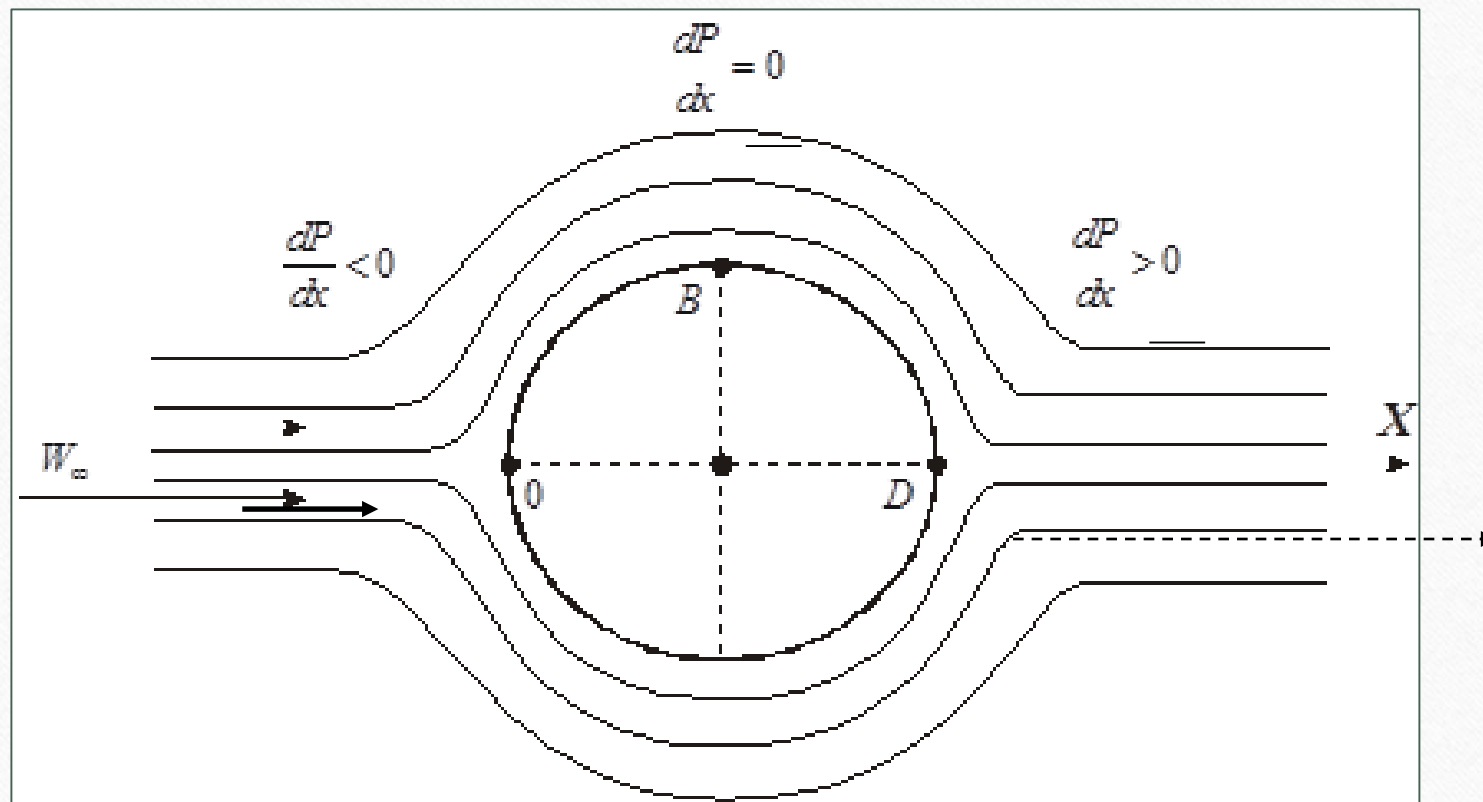
$$\left\{ \begin{array}{l} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

**Граничные условия :**

– на стенке при  $y = 0$ :  $w_x = 0$ ;  $w_y = 0$ ;

и при  $y \rightarrow \infty$ :  $w_x \rightarrow U(x)$ ; (или при  $y \approx \delta$   $w_x \approx U(x)$ ).

### 5.7.3. Отрыв пограничного слоя



а) Обтекание тела идеальной жидкостью

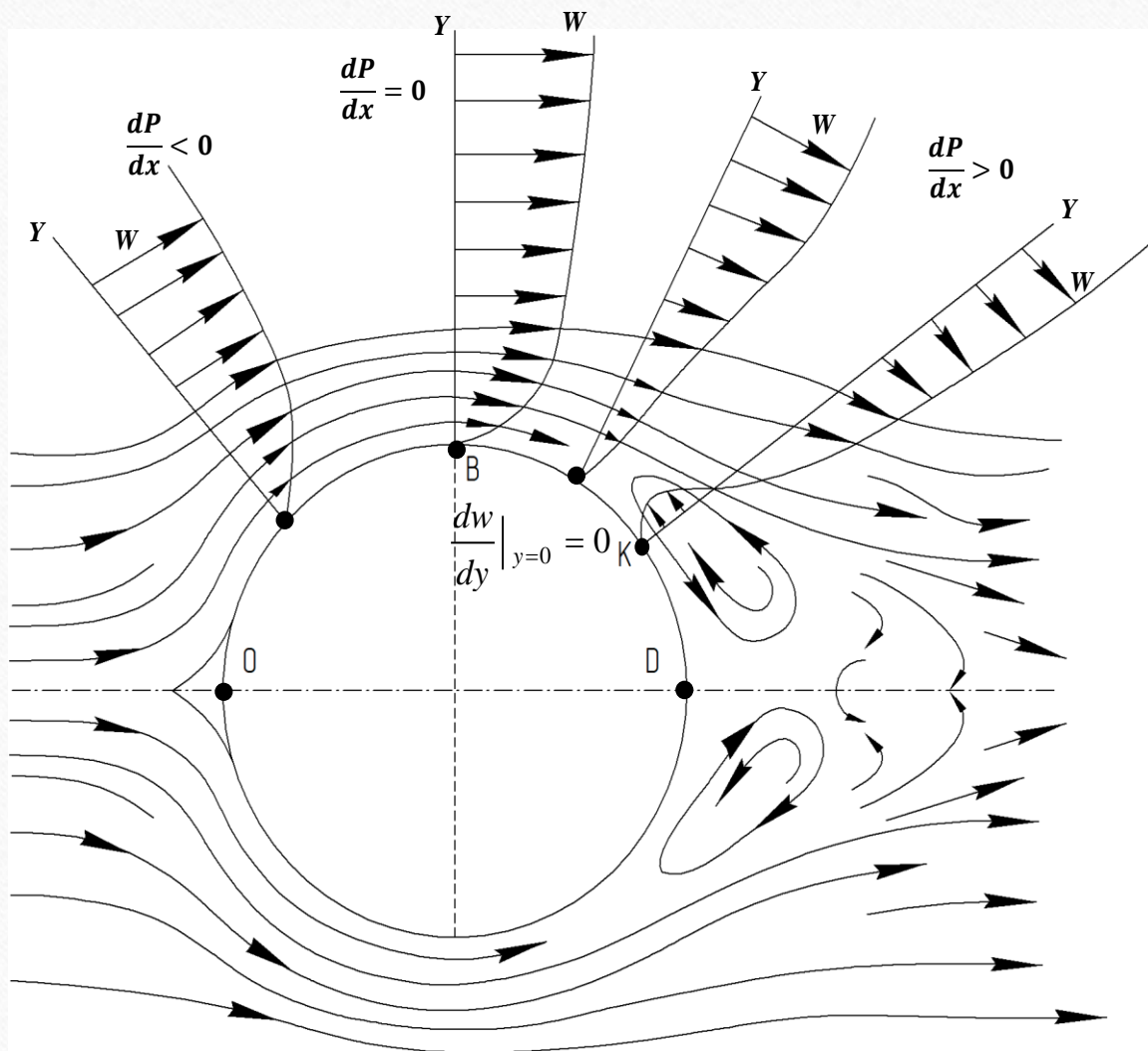


## Отрыв пограничного слоя

Идеальная жидкость между точками О и В движется ускоренно (конфузорный канал). При этом давление понижается по мере приближения к точке В, потенциальная энергия давления преобразуется в кинетическую. Между точками В и Д скорость движения уменьшается, давление возрастает и происходит обратное преобразование кинетической энергии в энергию давления так, что в точку Д жидкость приходит с той же скоростью, что и в набегающем потоке перед точкой О.

*Иначе ведет себя реальная (вязкая) жидкость, движущаяся в пограничном слое в непосредственной близости к поверхности цилиндра.*

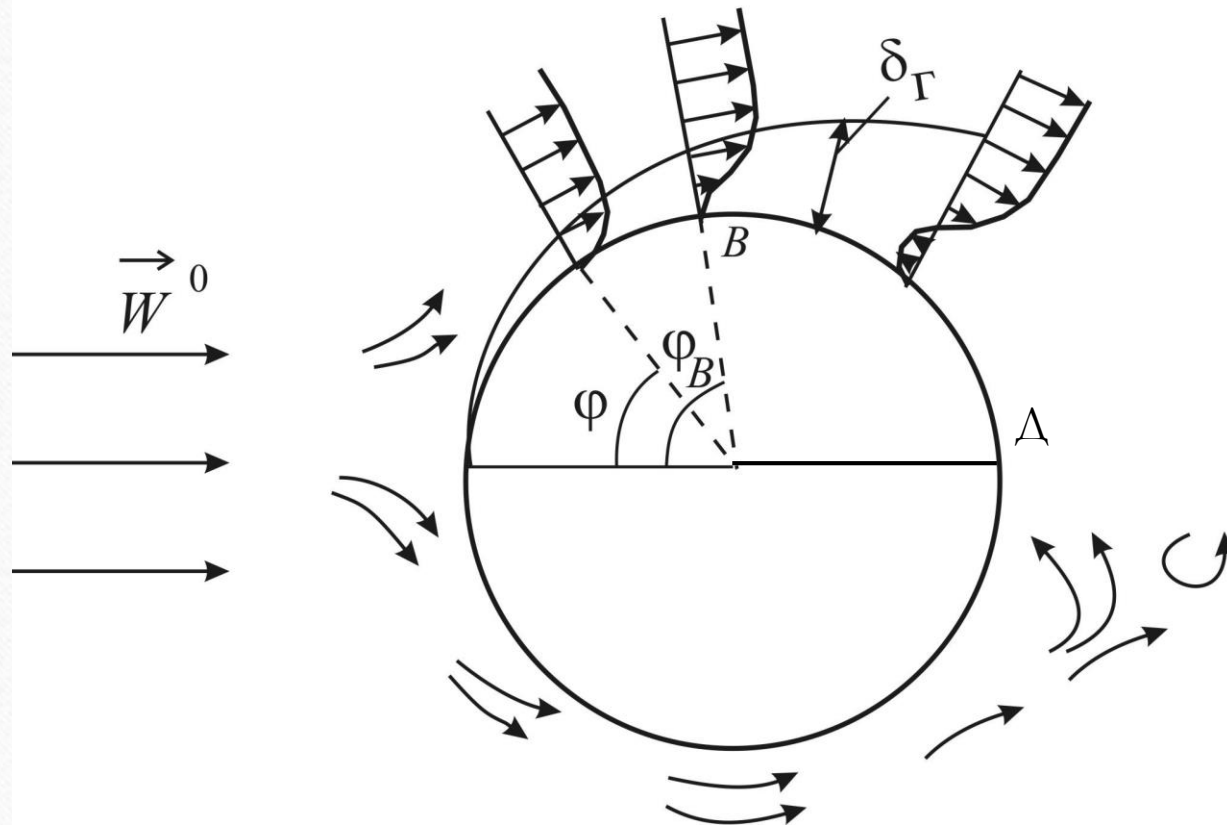
## Отрыв пограничного слоя



Поле давления в пограничном слое такое же, как и во внешнем течении. Однако действие сил трения приводит к тому, что на пути от точки О к точке В часть кинетической энергии жидкости теряется, и *оставшейся энергии недостаточно для преодоления повышающегося давления на пути между точками В и Д.* Поэтому, не доходя до точки Д, жидкость в пограничном слое *останавливается* и под действием внешнего перепада давления *начинает двигаться в обратном направлении.*



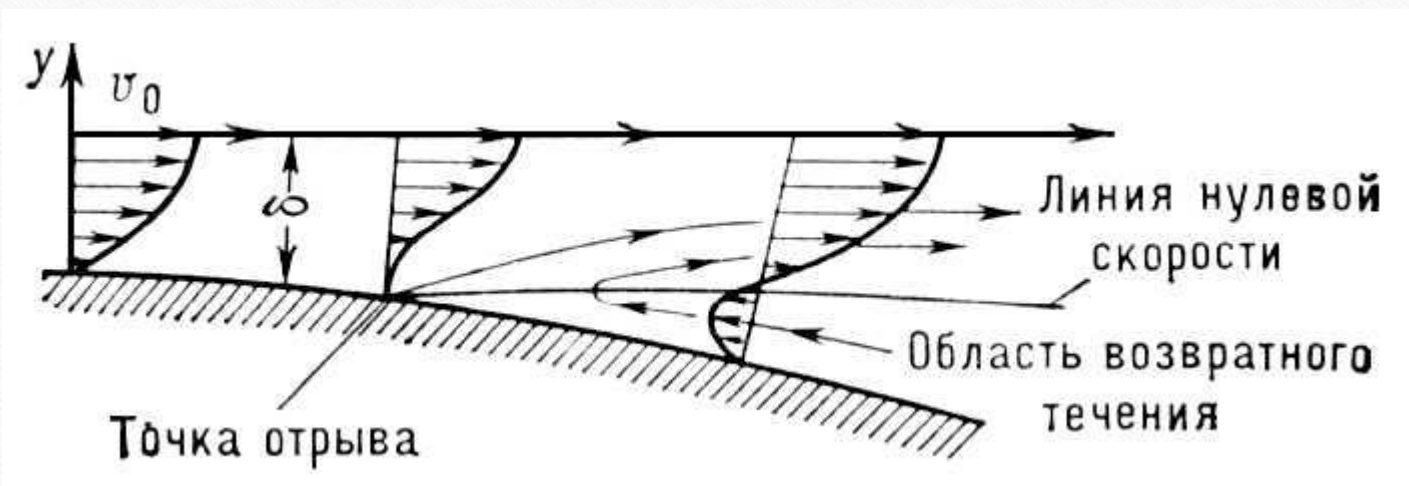
# Отрыв пограничного слоя



б) Обтекание тела реальной жидкостью

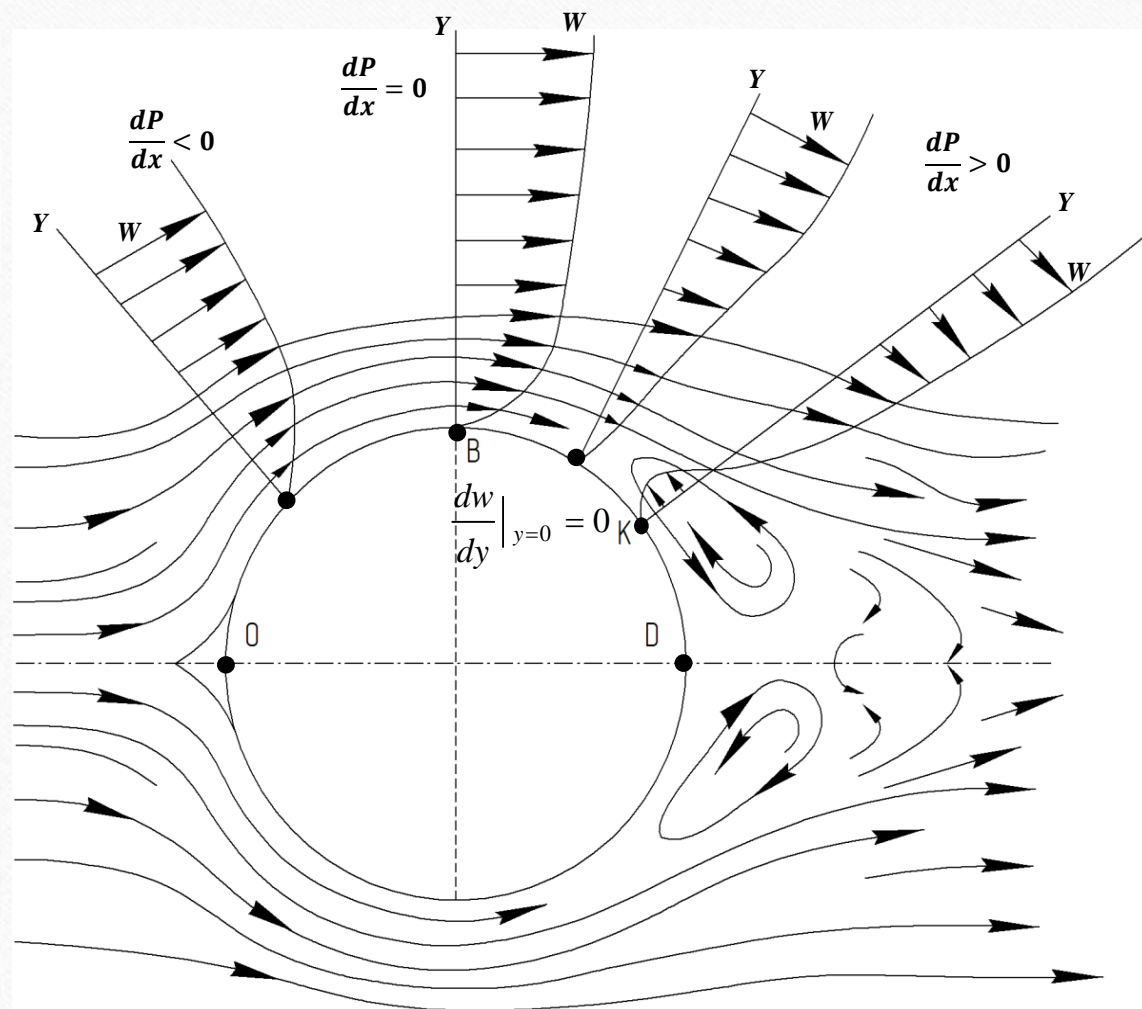


## Отрыв пограничного слоя



б) Обтекание тела реальной жидкостью

# Отрыв пограничного слоя



Набегающий внешний поток встречается с движущейся в противоположном направлении жидкостью в пограничном слое, в результате происходит резкое оттеснение линий тока от поверхности тела, утолщение пограничного слоя и отрыв его от поверхности цилиндра.

До точки отрыва  $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} > 0$ , за точкой отрыва  $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} < 0$

**В самой точке отрыва (точка A) :**

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$



## **Контрольные вопросы**

1. Какими уравнениями полностью описывается движение вязкой жидкости?
2. Как определить эквивалентный диаметр для труб и каналов некруглого сечения?
3. Напишите уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости в трубах и каналах. Подпишите название слагаемых.
4. Чем уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости отличается от уравнения Бернулли для потока идеальной жидкости?



## **Контрольные вопросы**

5. Для чего нужна теория подобия?
6. Перечислите числа гидромеханического подобия.
7. Запишите формулу для числа  $Re$ . Подпишите обозначения в правой части формулы.
8. В чём заключается первая теорема подобия?
9. В чём заключается вторая теорема подобия?
10. Что такое характерный размер в числах подобия?
11. Какие существуют режимы движения вязкой жидкости?

## ***Контрольные вопросы***

12. При каком значении числа Рейнольдса начинается переход от ламинарного режима движения к турбулентному при движении жидкостей и газов в трубах и каналах?

13. Что такое пограничный слой?

14. Назовите условие отрыва пограничного слоя.

15. Как толщина пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса потока?



## Глава 6.

# НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ

### **6.1. Практические способы расчета гидравлических потерь**

#### **6.1.1. Определение потерь напора на трение по длине канала**

При движении реальной жидкости или газа часть энергии потока *теряется на преодоление сил трения*. Эти потери энергии проявляются в снижении полного напора вниз по потоку, что учитывается в уравнении Бернулли членом  $\Delta p$ .

**Разность значений полного напора между двумя сечениями канала называется гидравлическими потерями.**

## Определение потерь напора на трение по длине канала

Существует два вида гидравлических потерь: потери на трение (потери по длине трубопровода) и местные гидравлические потери.

Потери напора на трение в трубах и каналах определяются выражением известным как формула Дарси:

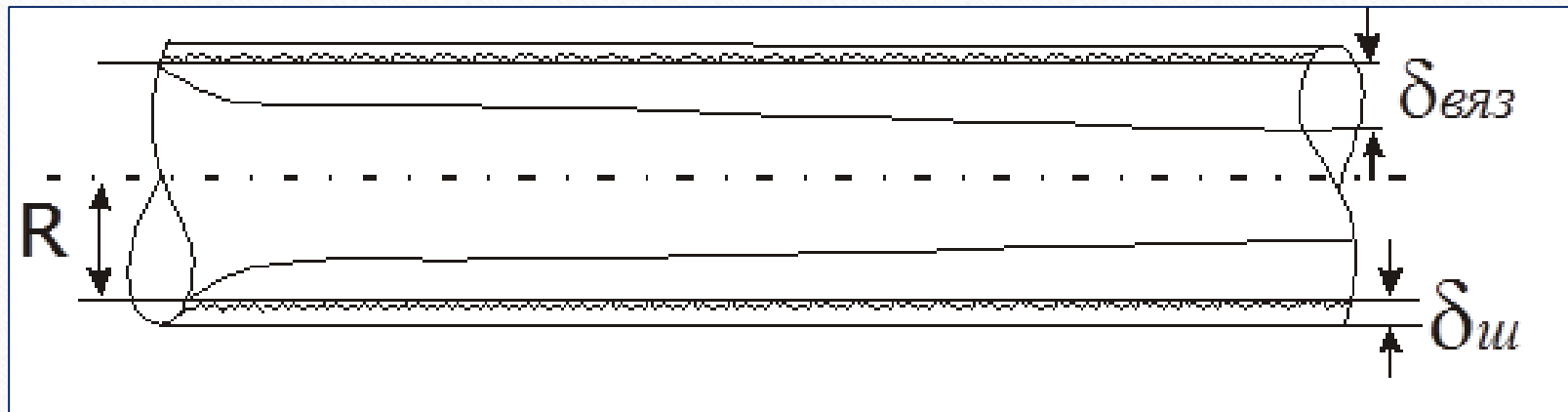
$$\Delta p_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w_{\text{cp}}^2}{2}, \text{ Па} \quad \text{или} \quad \Delta h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_{\text{cp}}^2}{2g}, \text{ м}$$

где  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения.

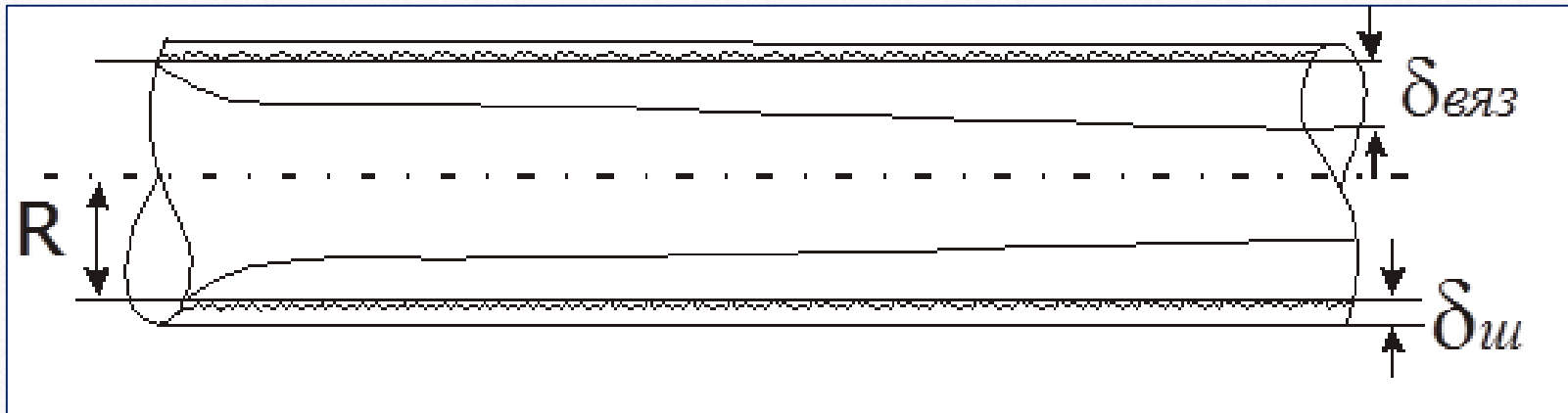


## Определение потерь напора на трение по длине канала

Коэффициент гидравлического трения зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости поверхности.



## Определение потерь напора на трение по длине канала

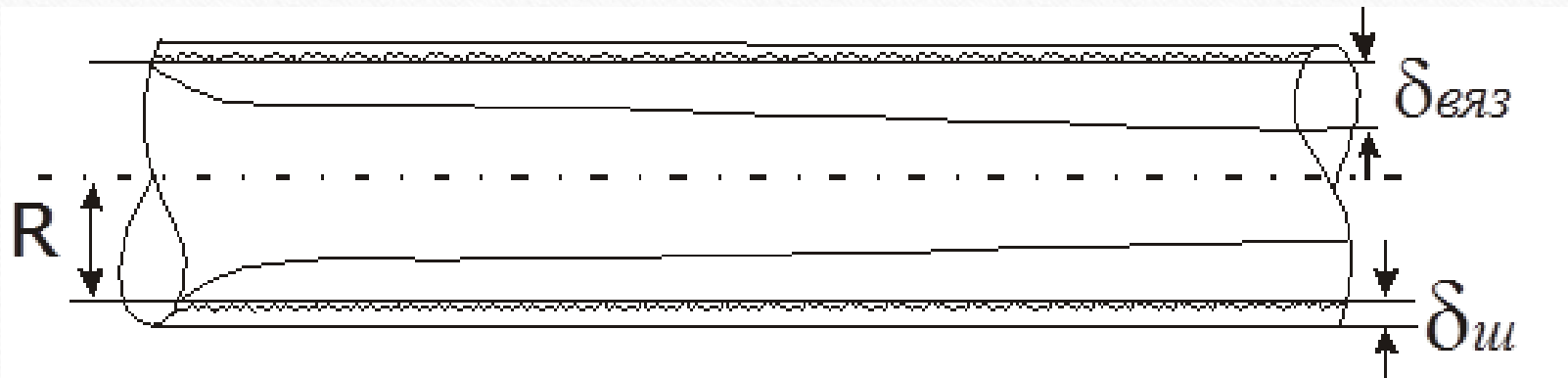


При ламинарном движении ( $Re < 2300$ ) высота бугорков шероховатости меньше толщины пограничного слоя, поэтому коэффициент  $\lambda$  не зависит от шероховатости и определяется по формуле :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$



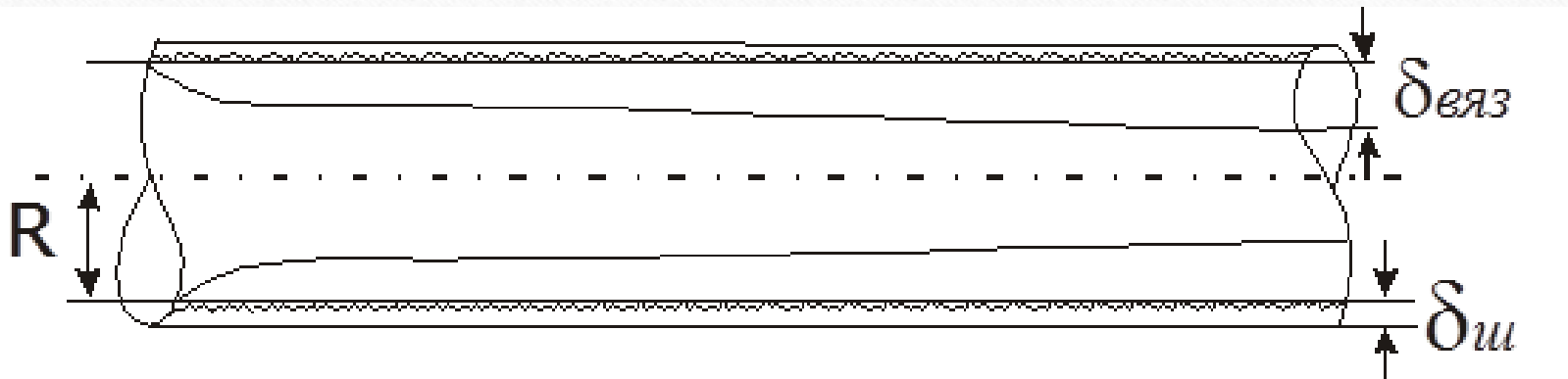
## Определение потерь напора на трение по длине канала



Режим «гидравлически гладких» труб реализуется в диапазоне  $2300 \leq Re \leq 4000$  или в случае, если  $2300 \leq Re \leq 10 d/\delta_{ш}$ .

При таком режиме движения поток характеризуется турбулентным ядром и ламинарным пограничным слоем, толщина которого больше высоты выступов шероховатости  $\delta_{ш}$ .

## Определение потерь напора на трение по длине канала

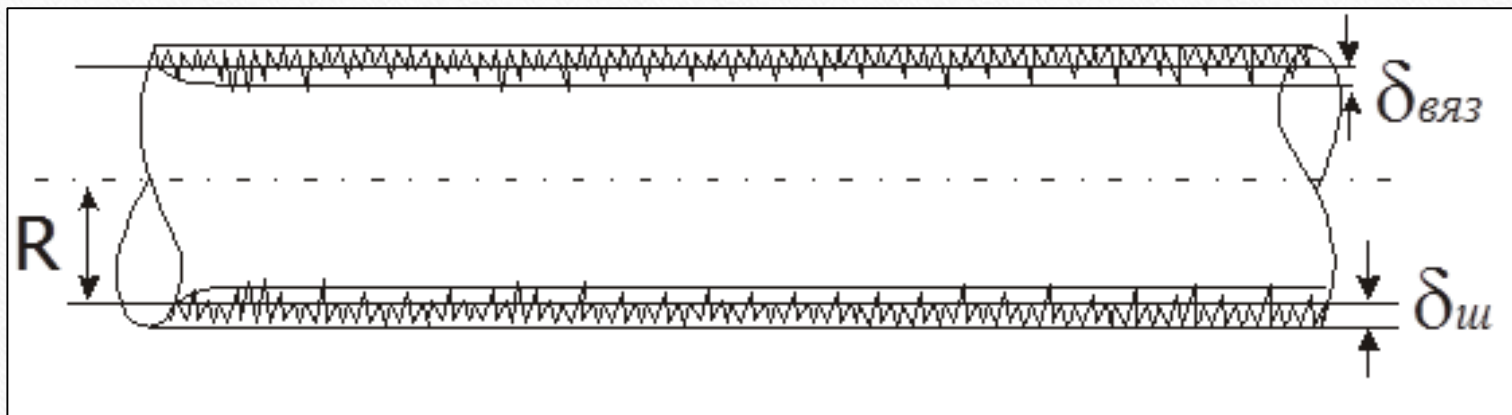


В области «гидравлически гладких» труб высота бугорков шероховатости меньше толщины пограничного слоя, поэтому коэффициент  $\lambda$  не зависит от шероховатости и определяется по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$

## Определение потерь напора на трение по длине канала

В случае если  $10d/\delta_{ш} \leq Re \leq 500d/\delta_{ш}$ , реализуется зона «доквадратичного сопротивления». В этом диапазоне происходит развитое турбулентное движение, при котором толщина ламинарного вязкого подслоя имеет тот же порядок величины, что высота бугорков шероховатости.





## Определение потерь напора на трение по длине канала

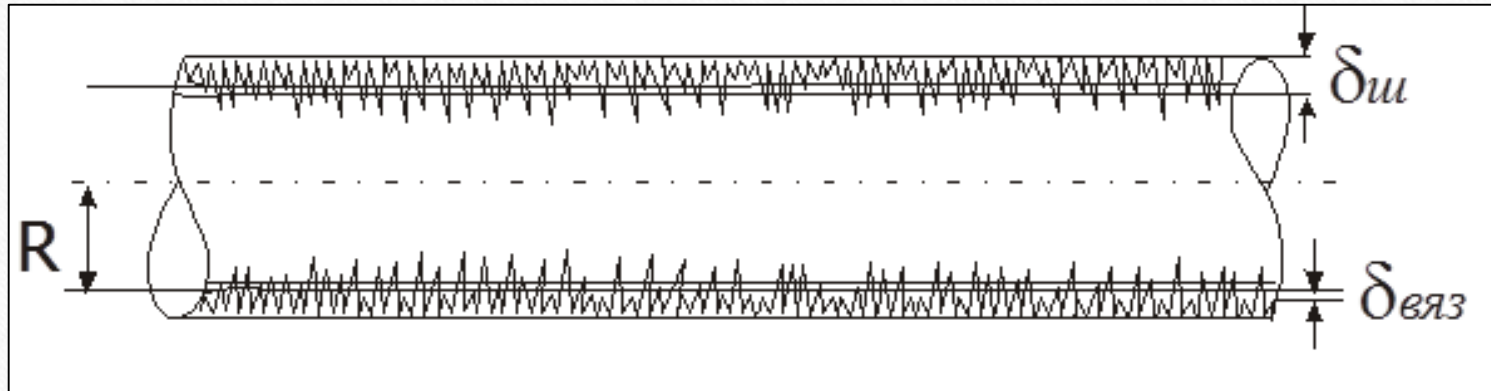
Зона «доквадратичного сопротивления»  $10d/\delta_{ш} \leq Re \leq 500d/\delta_{ш}$

Коэффициент  $\lambda$  зависит и от  $Re$ , и от шероховатости поверхности. Для этой области течения применима формула Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left[ \frac{\delta_{ш}}{d} + \frac{68}{Re} \right]^{0,25}$$

При больших значениях  $Re$  ( $Re > 500 \cdot d/\delta_{ш}$ ) высота бугорков шероховатости больше толщины вязкого ламинарного подслоя, бугорки обтекаются с отрывом и за ними образуются объемы с вихрями и пониженными давлениями.

## Область квадратичного сопротивления $Re > 500 \cdot d / \delta_{ш}$



Коэффициент трения в этом случае практически не зависит от числа  $Re$ , и определяется только величиной относительной шероховатости. Это область квадратичного сопротивления (так как потери пропорциональны квадрату скорости), где применима формула

Шифринсона: 
$$\lambda = 0,11 \left[ \frac{\delta_{ш}}{d} \right]^{0,25}$$



## 6.1.2. Определение потерь напора на местных препятствиях

Кроме потерь напора на трение о стенки канала в реальных гидравлических системах возникают потери напора (энергии) на преодоление, так называемых, местных сопротивлений (например, при повороте потока, резком изменении формы и площади поперечного сечения канала, при прохождении потока через решётки, клапаны и т. п.).

В практике гидравлических расчетов все местные потери напора обычно определяются по формуле Вейсбаха:

$$\Delta p_i = \xi_i \frac{\rho w_{\text{cp}}^2}{2}, \text{ Па}$$



## Определение потерь напора на местных препятствиях

$$\text{Или: } \Delta h_i = \xi_i \frac{w_{\text{ср}}^2}{2g}, \text{ м.}$$

где  $\xi_i$  — коэффициент местного сопротивления, индекс  $i$  указывает на соответствующий номер местного сопротивления.

Значения  $\xi_i$  определяются экспериментально или по справочникам гидравлических сопротивлений, например, в справочниках под редакцией П.К. Киселева или под редакцией И.Е. Идельчика.

Общая потеря напора в трубопроводе определяется суммой потерь на преодоление трения и местных сопротивлений на всей его длине:

$$\Delta p = \Delta p_l + \sum_{i=1}^N \Delta p_i$$

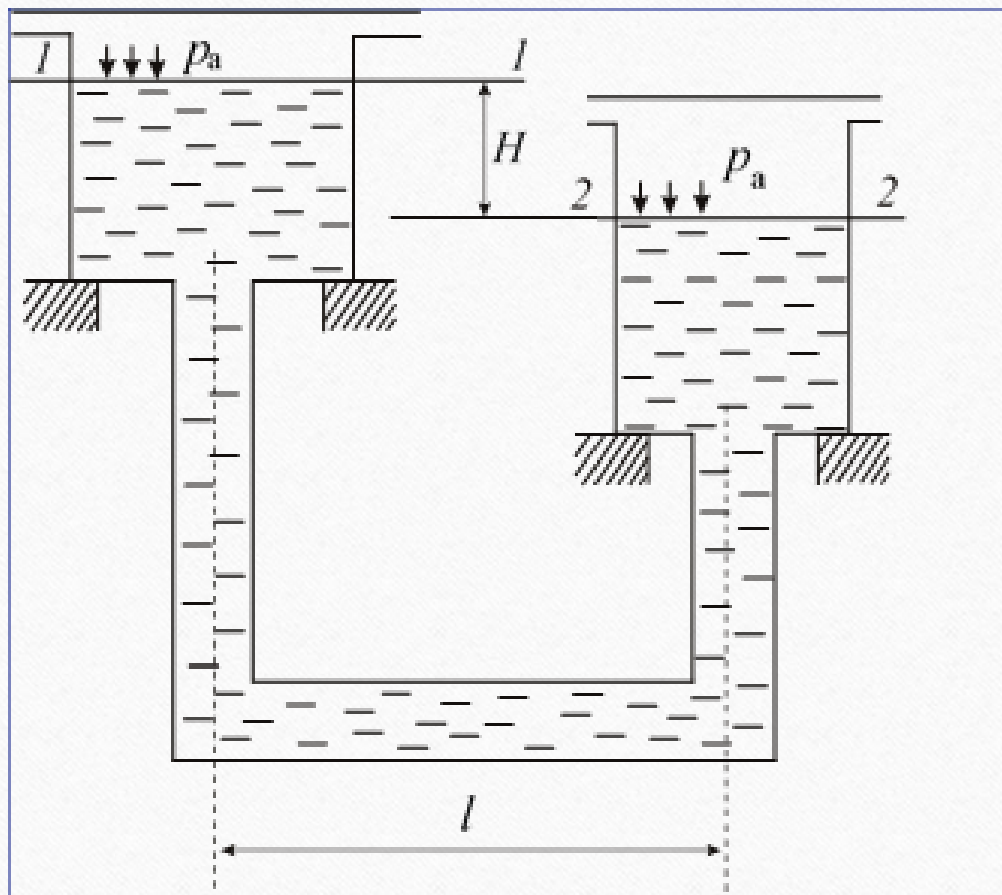
## 6.2. Гидравлический расчет трубопроводов

Под гидравлическим расчетом трубопровода понимают либо определение *параметров движения жидкости* в нем при заданной схеме течения и известных размерах конструктивных элементов, либо определение этих *размеров, обеспечивающих необходимые параметры движения жидкости.*



## **6.2.1. Расчет длинных трубопроводов**

Под длинным трубопроводом понимают такой, в котором гидравлические потери на местных сопротивлениях составляют не более 10 % от общих потерь напора. В коротком трубопроводе местные потери, как правило, соизмеримы с потерями на трение, во всяком случае, как следует из определения длинного трубопровода, доля местных потерь в коротком трубопроводе заметно превышает 10 % от их общей величины.



## Расчет длинных трубопроводов

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2. Примем за плоскость отсчета  $z$  сечение 2-2, тогда  $z_1 = H$ ,  $z_2 = 0$ .  $w_1 \cong w_2 \cong 0$

$$p_a + \rho g H = p_a + \Delta p_{1-2}.$$

$$\Delta p_{1-2} = \rho g H$$

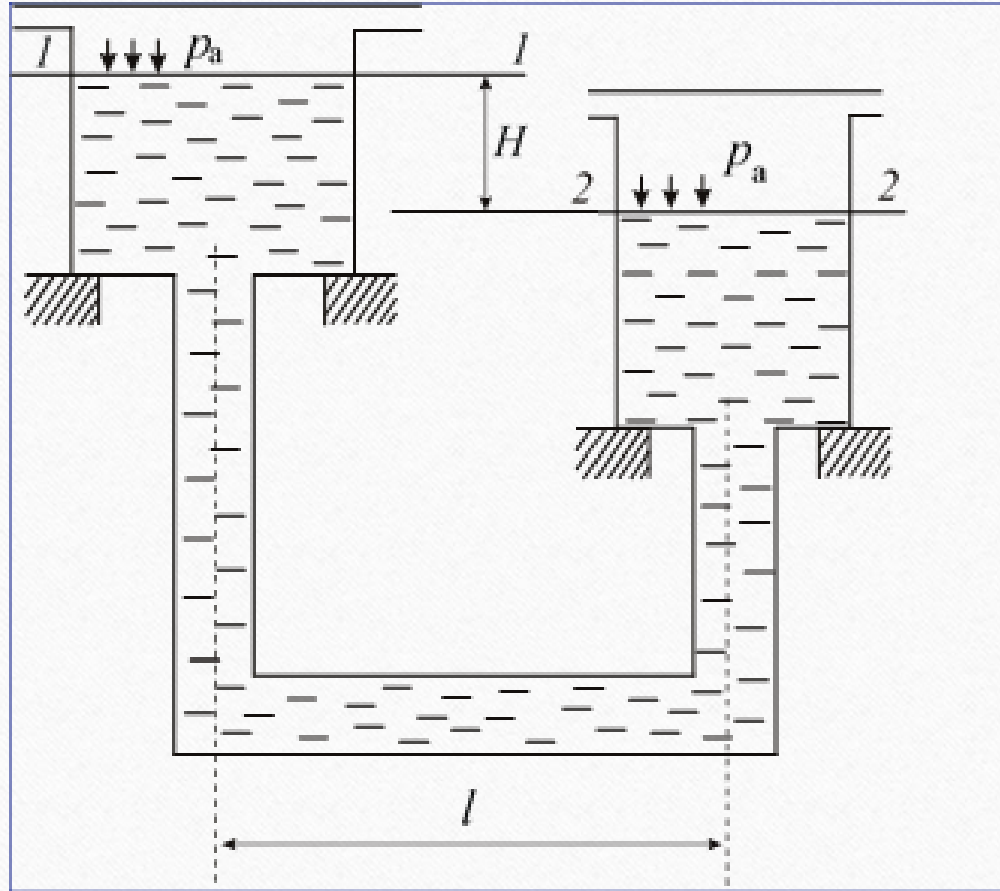
Потери напора на местных препятствиях незначительны.

Потери на трение:

$$\Delta h_l = \frac{\Delta p_{1-2}}{\rho g} = H.$$



## Расчет длинных трубопроводов



С другой стороны, потери на трение определяются формулой Дарси:

$$\Delta p_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w_{\text{cp}}^2}{2}$$

Средняя скорость определяется через объемный расход  $Q$  из уравнения сплошности, тогда:

$$\Delta p_l = \rho g H = \lambda_{\text{T}} \frac{8\rho Q^2 l}{\pi^2 d^5}$$

или 
$$\Delta h_l = H = \lambda_{\text{T}} \frac{8Q^2 l}{\pi^2 g d^5}.$$

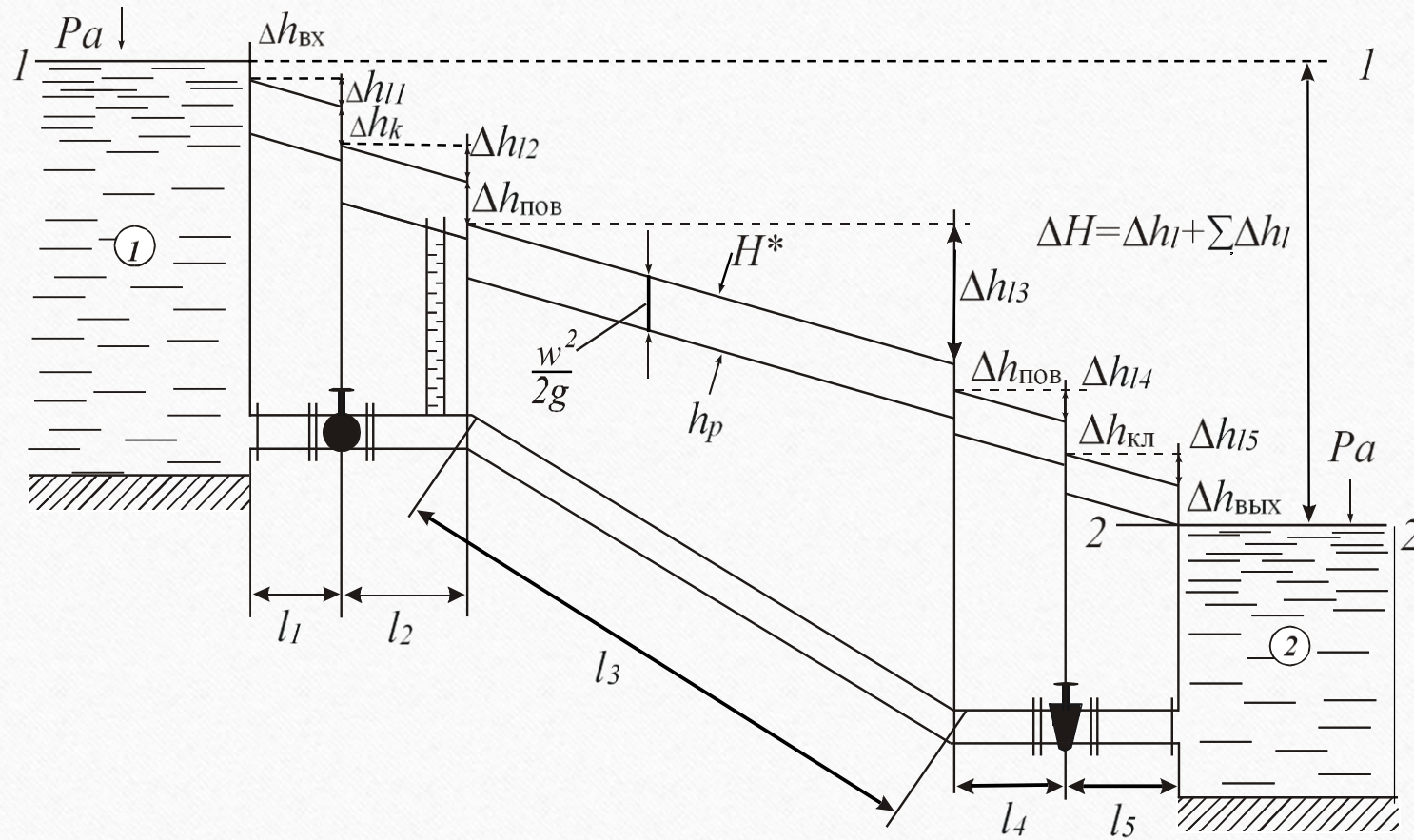
Формула позволяет определить нужный параметр в зависимости от других заданных.

## 6.2.2. Расчет коротких трубопроводов

В гидравлическом расчете короткого трубопровода главным является определение *местных сопротивлений*. В сравнении с суммарным значением местных сопротивлений потеря напора на трение по всей длине трубопровода может быть или пренебрежимо малой, или, как максимум, на уровне величины одного из местных коэффициентов.



# Расчет коротких трубопроводов



## Расчет коротких трубопроводов

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2

$$\alpha_1 \frac{\rho w_{cp1}^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \alpha_2 \frac{\rho w_{cp2}^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{1-2}$$
$$p_a + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_2 + \Delta p_l + \Delta p_M$$

считая, что  $w_1 \cong w_2 \cong 0$ ,  $p_1 = p_2 = p_a$ , получим:

Учитывая, что  $Z_1 = H, Z_2 = 0$ :  $\rho g H = \Delta p_l + \Delta p_M$

Где  $\Delta p_M = \sum_{i=1}^n \Delta p_i$  - суммарные потери на местных препятствиях.

Или:  $H = \Delta h_l + \Delta h_{ex} + \Delta h_k + 2\Delta h_{пов} + \Delta h_{кл} + \Delta h_{вых}$

Где  $\Delta h_l$  - потеря напора на трение в трубопроводе на всей его длине.



## Расчет коротких трубопроводов

Или: 
$$H = \left( \sum_i \lambda \frac{l_i}{d_i} + \sum_j \xi_j \right) \frac{w^2}{2g}$$

Откуда найдём расход по уравнению сплошности:

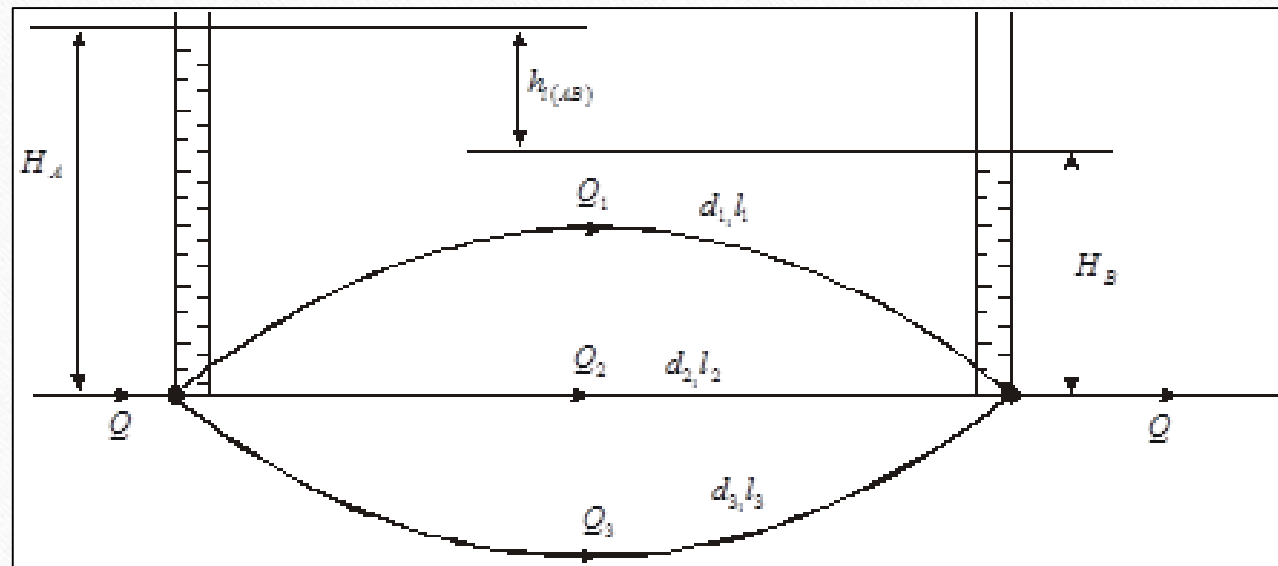
$$Q = S \cdot w = S \sqrt{\frac{2gH}{\xi_s}}$$

Где 
$$\xi_s = \lambda \sum_i \frac{l_i}{d_i} + \sum_j \xi_j$$

Можно определить, какой должна быть разность уровней жидкости в резервуарах, чтобы обеспечить заданный расход (проектный расчет) или какой расход обеспечит имеющийся перепад уровней (проверочный расчёт).

### 6.2.3. Параллельное и последовательное соединения трубопроводов

Потери напора при **параллельном** соединении в каждой из труб одинаковы:  $\Delta h_{l_1} = \Delta h_{l_2} = \Delta h_{l_3} = \Delta h_{l(AB)}$

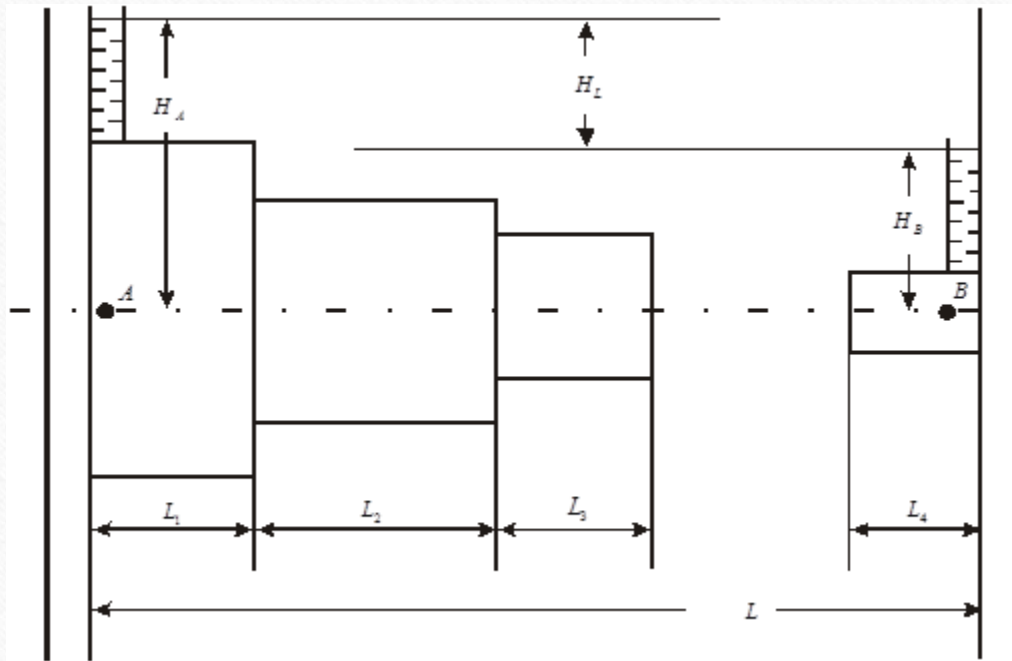


Расход:  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ .



# Параллельное и последовательное соединения трубопроводов

Потери напора при последовательном соединении :



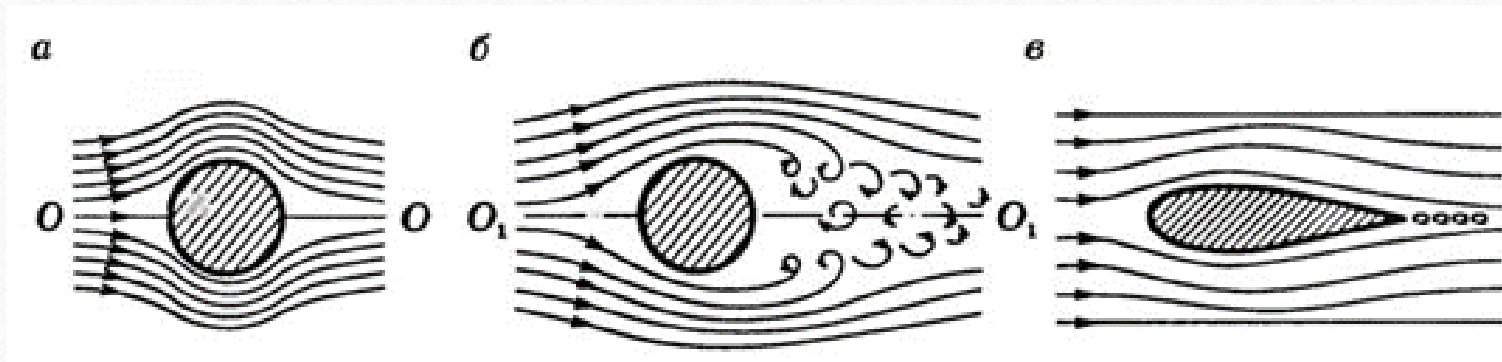
$$H_A - H_B = h_L = \sum_{i=1}^n h_i$$

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3.$$

## 6.3. Сопротивление движению тел в жидкости

При обтекании тела идеальной жидкостью давление на передней его кромке равно давлению на задней кромке.

При обтекании тела *реальной* жидкостью давление на задней кромке тела *не равно* давлению в набегающем потоке.



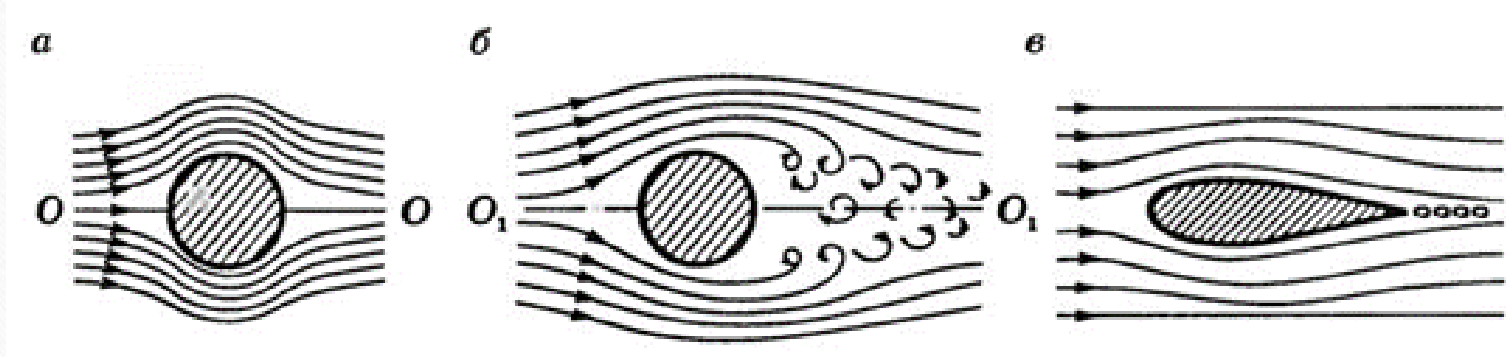


## ***Сопротивление движению тел в жидкости***

Давление в кормовой части тела уменьшается и, следовательно, появляется результирующая сил давления, направленная в сторону, противоположную движению тела. *Проекция результирующей гидродинамического давления, возникающего вследствие перераспределения давления по смоченной поверхности обтекаемого тела, на направление движения тела называется **сопротивлением формы**, или **сопротивлением давления**.*

Величина сопротивления формы зависит от *формы тела, его относительных размеров и от ориентации тела по отношению к потоку.*

# Сопротивление движению тел в жидкости



Кроме того, при обтекании тел вязкой (реальной) жидкостью, вследствие торможения ее в пограничном слое, возникают касательные напряжения, вызывающие *сопротивление трения*, величина которого *зависит от соотношения толщины пограничного слоя и шероховатости поверхности*.

Результирующая касательных напряжений в проекции на направление движения тела называется **сопротивлением трения**.



## Профильное сопротивление

Сумма сопротивления трения и сопротивления формы называется **профильным сопротивлением**:

$$\Delta p_{\text{проф}} = \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{ф}}$$

$$\Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{ф}} = (\xi_{\text{тр}} + \xi_{\text{ф}}) \cdot \frac{\rho w^2}{2}$$

$$\Delta p_{\text{проф}} = \xi_{\text{проф}} \frac{\rho w^2}{2}$$

$$\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} + \xi_{\text{ф}} \quad \text{- коэффициент профильного сопротивления}$$



## Профильное сопротивление

$\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} + \xi_{\text{ф}}$  - коэффициент профильного сопротивления

$\xi_{\square\text{тр}}$  - коэффициент трения

$\xi_{\square\text{ф}}$  - коэффициент сопротивления формы (КСФ)

$$\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} (1 + k)$$

где  $k$  - постоянная для данного тела величина

## Обтекание тел потоком

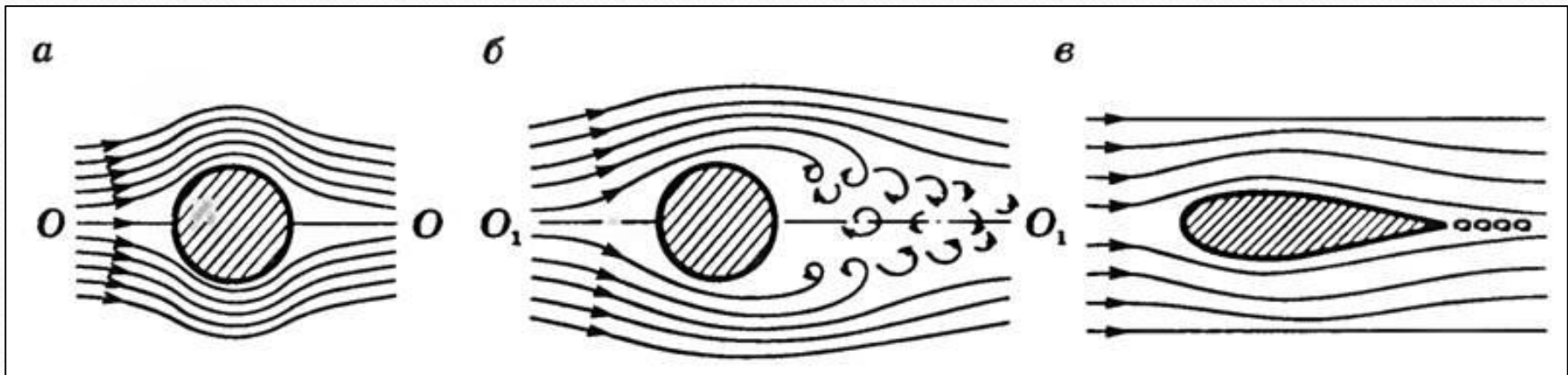
В случае если обтекание тела происходит без отрыва пограничного слоя, или отрыв происходит вблизи задней кромки, такие тела называют **хорошо обтекаемыми**, в противном случае это тела **плохо обтекаемой формы**.



# Обтекание тел потоком

а) -Идеальное обтекание

б) , в) – реальное обтекание

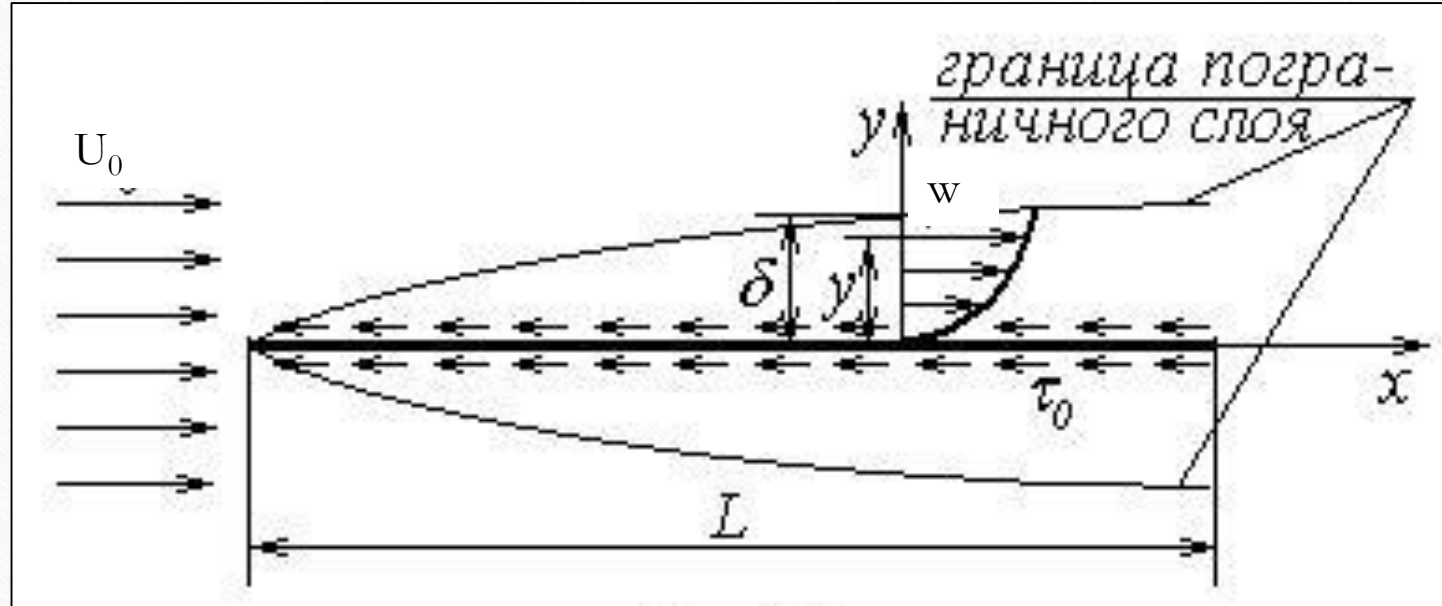


а), б) – тела плохо обтекаемой формы

в) – тело хорошо обтекаемой формы

**Какое тело обладает  
минимальным профильным  
сопротивлением?**

# Сопротивление обтеканию пластины



$$\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} (1 + k) , \quad k = 0 \text{ при продольном обтекании пластины}$$



## Сопротивление обтеканию пластины

Для ламинарного пограничного слоя коэффициент трения определяется формулой Блазиуса:

$$\xi_l = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$$

Для турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности формула Прандтля - Шлихтинга:

$$\xi_m = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2.58}}$$

$$Re = \frac{w_\infty L}{\nu}$$

$w_\infty$  - скорость набегающего потока,

$L$  - длина пластины

## Сопротивление хорошо обтекаемых тел

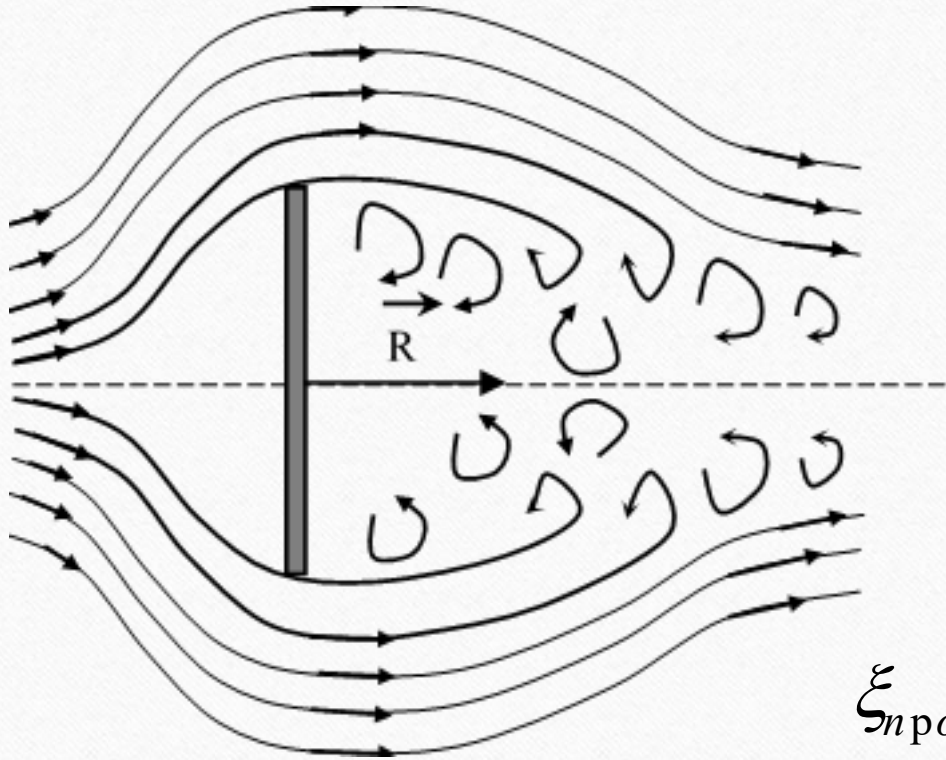
Для упрощения расчётов сопротивления узких, вытянутых тел в формулу  $\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} (1 + k)$  подставляют коэффициент трения эквивалентной пластины, под которой подразумевается плоская пластина, имеющая такие же длину и смоченную поверхность, как и исследуемое тело, при одинаковых числах Рейнольдса.

Для хорошо обтекаемых тел:  $k = 0,05-0,25$ .

**Какое тело обладает  
максимальным  
профильным  
сопротивлением?**



# Сопротивление плохо обтекаемых тел



В предельном случае при обтекании *поперечно поставленной к потоку пластины*, сопротивление трения *равно нулю*, а профильное сопротивление равно сопротивлению формы:

$$\xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{тр}} + \xi_{\text{ф}} \quad \xi_{\text{тр}} = 0 \quad \xi_{\text{проф}} = \xi_{\text{ф}}$$

$$\Delta p_{\text{проф}} = \xi_{\text{проф}} \frac{\rho w^2}{2}$$

$$R = \xi_{\text{проф}} \frac{\rho w^2}{2} \cdot S \quad \text{- сила сопротивления движению}$$

## Сопротивление плохо обтекаемых тел

При обтекании шара в ламинарном режиме

$$(Re < 2): \quad \xi_{проф} = \frac{24}{Re}$$

в переходном режиме ( $Re = 2-500$ ):  $\xi_{проф} = \frac{18.5}{Re^{0.6}}$

в автомодельном режиме (при  $500 < Re < 2103$ ):

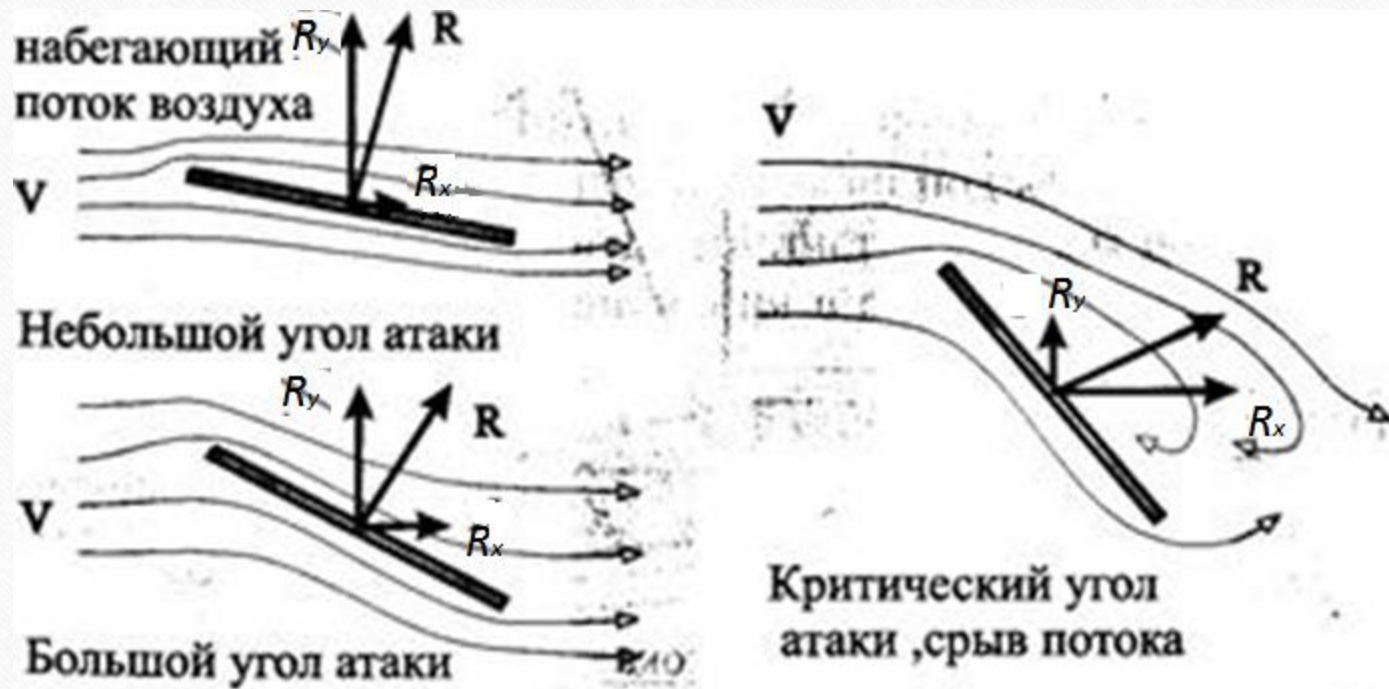
$$\xi_{проф} = 0,44 = \text{const}$$

## Значения коэффициента профильного сопротивления для некоторых тел

Форма тела	Коэффициент профильного сопротивления, $\xi_{\text{проф}} = c_f$
Сфера	0,47
Конус 2:1 (острием к потоку)	0,50
Куб (поверхностью к потоку)	1,05
Цилиндр (длина равна двум диаметрам, торцом к потоку)	0,82
Вытянутое каплевидное тело	0,04



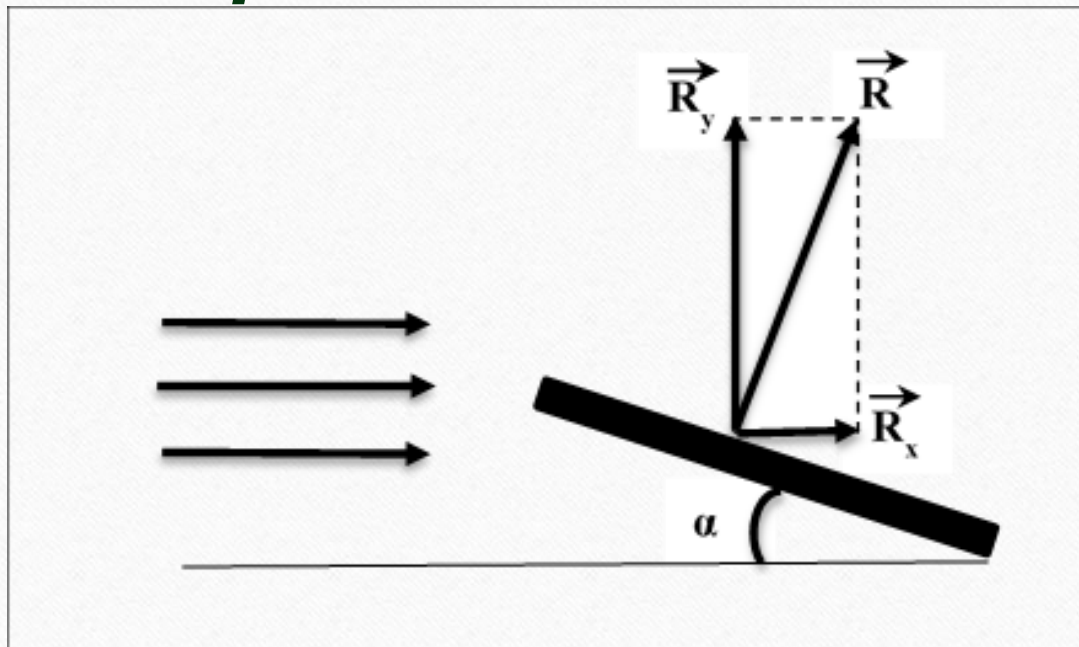
## 6.4. Лобовое сопротивление и подъёмная сила



$$R = \xi_{\text{проф}} \frac{\rho w^2}{2} \cdot S$$

- сила сопротивления движению

## Лобовое сопротивление и подъёмная сила



Продольная к потоку составляющая силы сопротивления называется лобовым сопротивлением:

$$R_x = R \cdot \sin \alpha = c_x \frac{\rho w^2}{2} S_y$$



## **Лобовое сопротивление и подъёмная сила**

где  $S_y = S \cdot \sin\alpha$  - площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения (так называемое «миделево сечение»)

Поперечная к потоку составляющая силы сопротивления называется **подъёмной силой**:

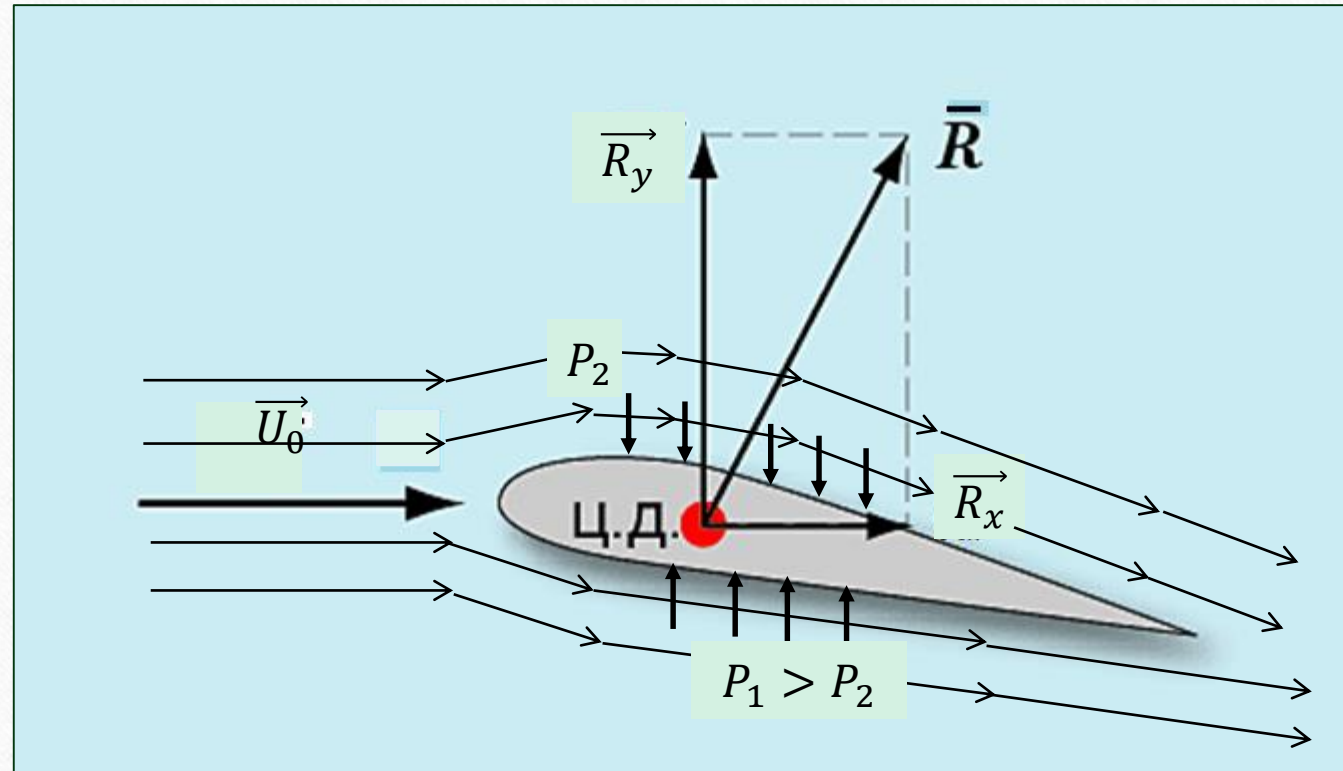
$$R_y = R \cdot \cos\alpha = c_y \frac{\rho w^2}{2} S_x \qquad S_x = S \cdot \cos\alpha$$

$C_x$  – коэффициент лобового сопротивления,

$C_y$  – коэффициент подъёмной силы = 0,026 ...1,5



# Крыловой профиль



Подъёмная сила может быть увеличена за счёт специальной формы тела.

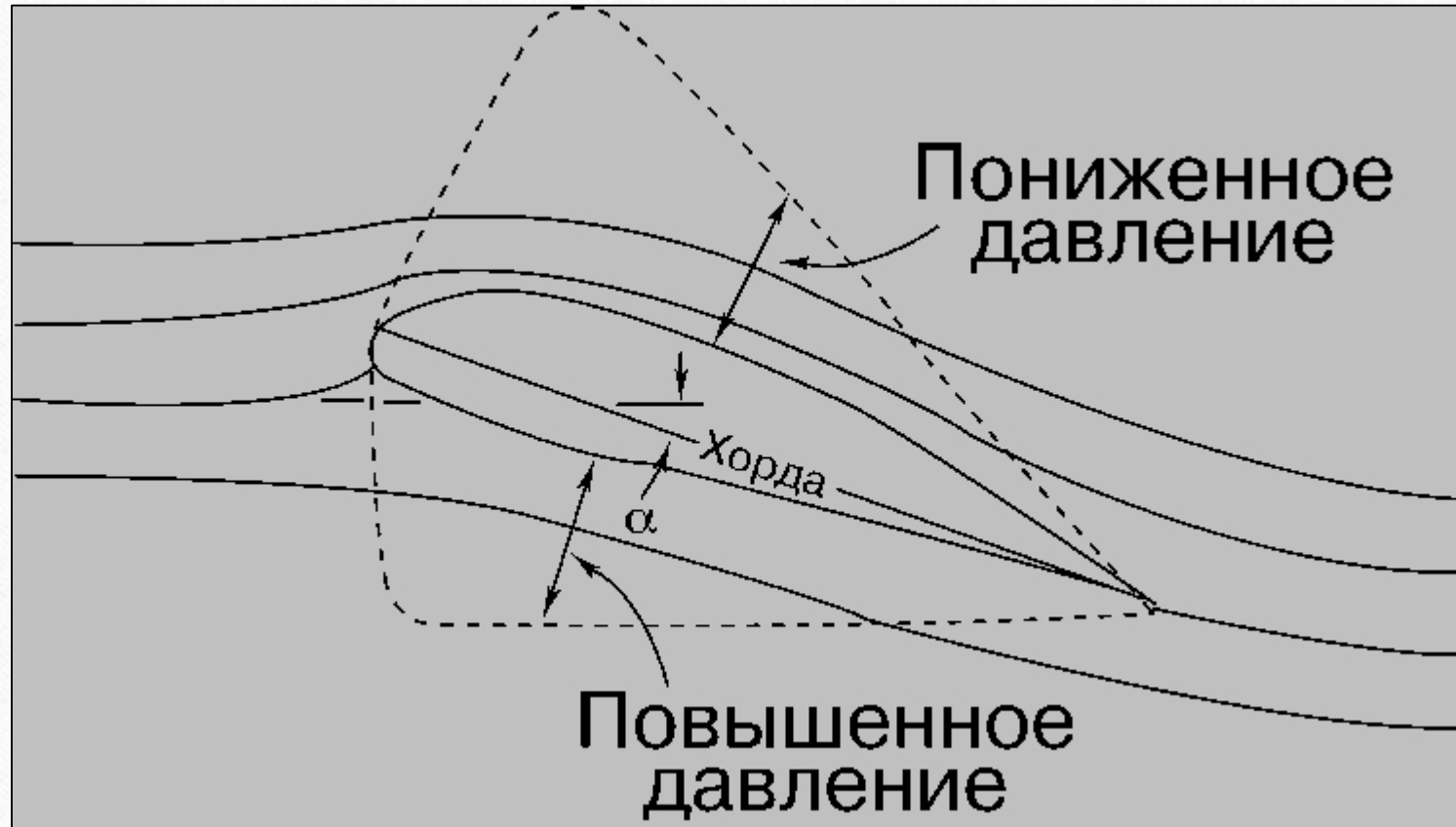
## Подъёмная сила крыла



На нижней поверхности крылового профиля скорость потока ниже и статическое давление выше, а на верхней части статическое давление ниже (т.к. скорость потока выше, ввиду геометрической разности длин).



## Подъёмная сила крыла



Подъёмная сила зависит от угла атаки  $\alpha$  (угла между вектором скорости и хордой крыла).

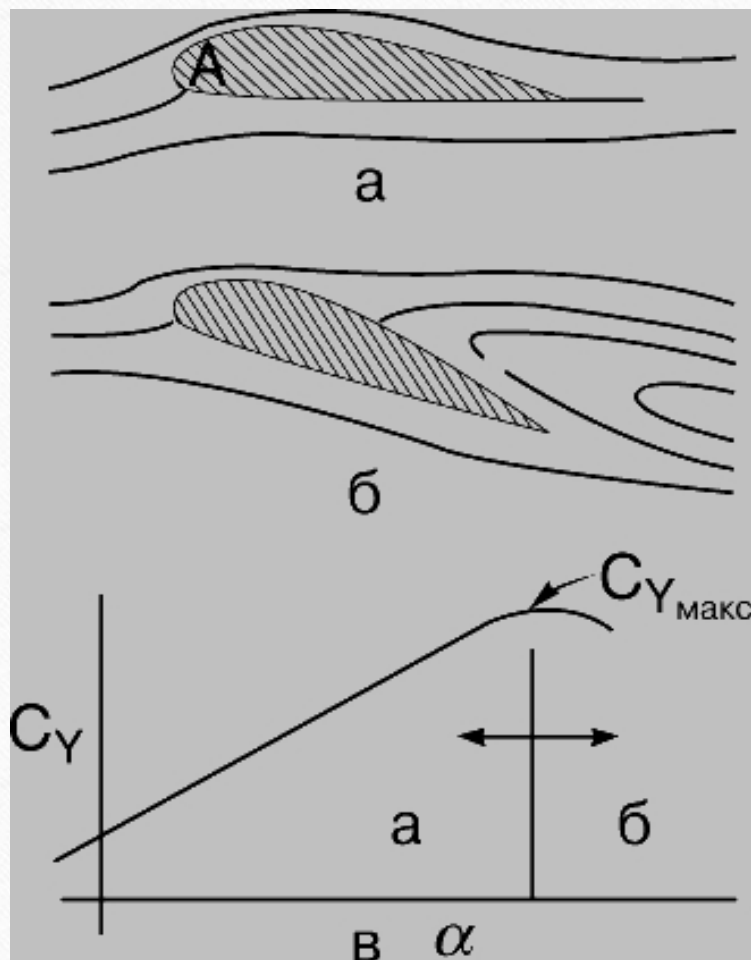


## Подъёмная сила крыла . Угол атаки.

При малых углах атаки с увеличением этого угла коэффициент подъемной силы возрастает.

Когда *угол атаки* крыла превышает некоторое *критическое значение* (заключенное в диапазоне от 12 до 15°), поток отрывается от верхней поверхности; происходит срыв потока с крыла. Он сопровождается *резким падением подъемной силы и ростом сопротивления* крыла.

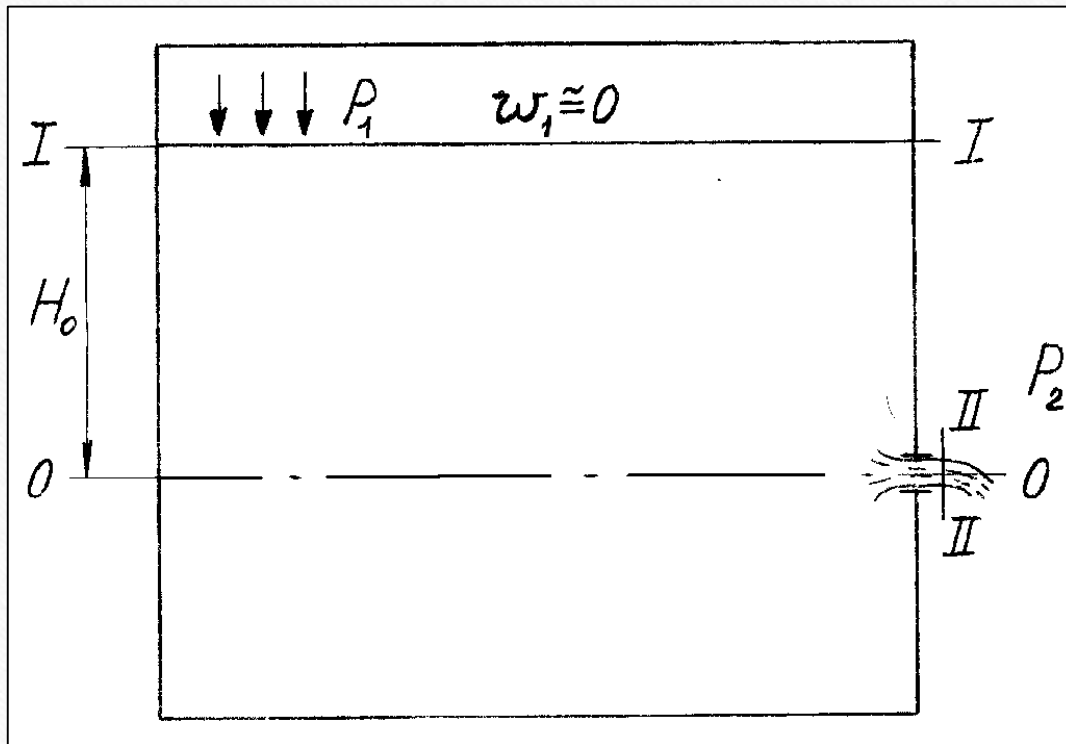
## Подъёмная сила крыла. Угол атаки.



а) линии тока около крыла до срыва потока,  
б) линии тока около крыла после срыва потока,  
Коэффициент подъемной силы вследствие срыва потока, проходит через максимум и резко уменьшается (в).

## 6.5. Истечение жидкости через отверстия и насадки

### 6.5.1. Геометрические характеристики истечения капельной жидкости



Если:  $d \leq 0.1H_0$

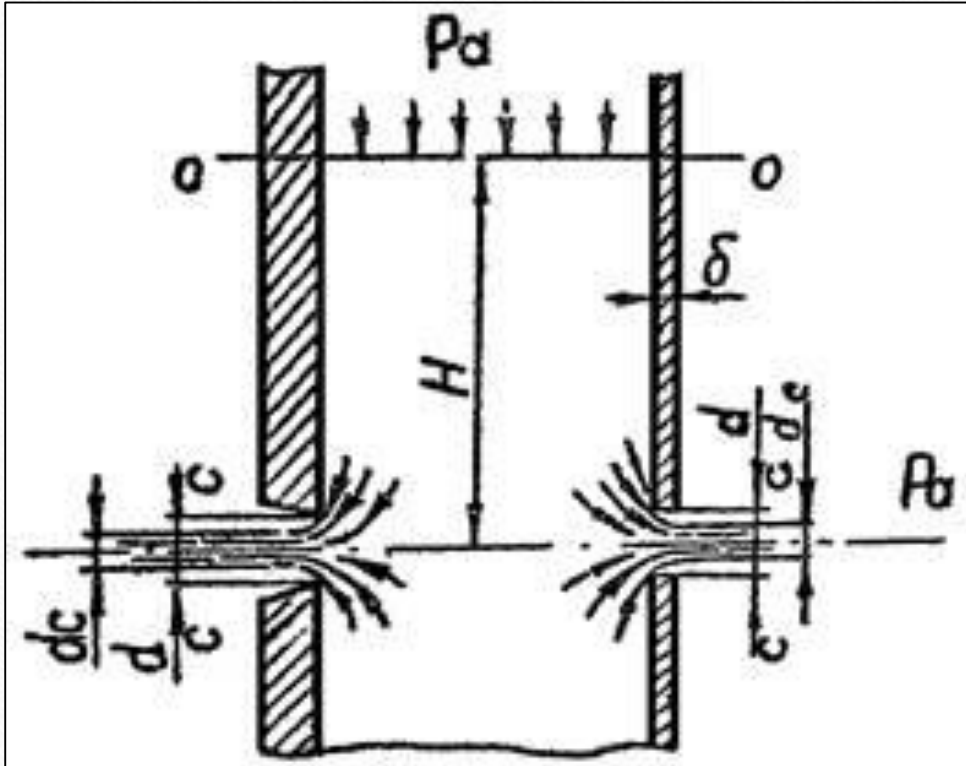
- малое отверстие

$d \geq 0.1H_0$

- большое отверстие



# Геометрические характеристики истечения капельной жидкости

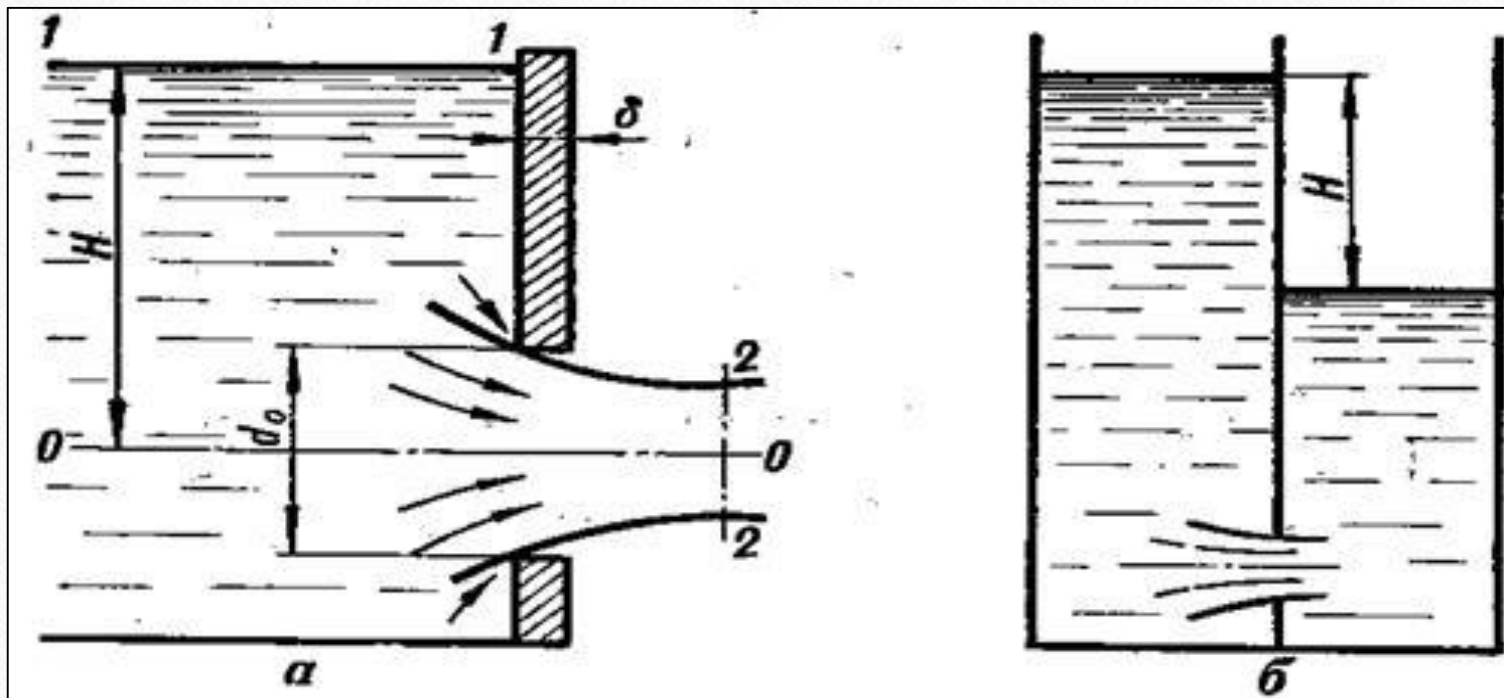


$\delta \leq 3d$  - Тонкая стенка

$\delta \geq 3d$  - Толстая стенка

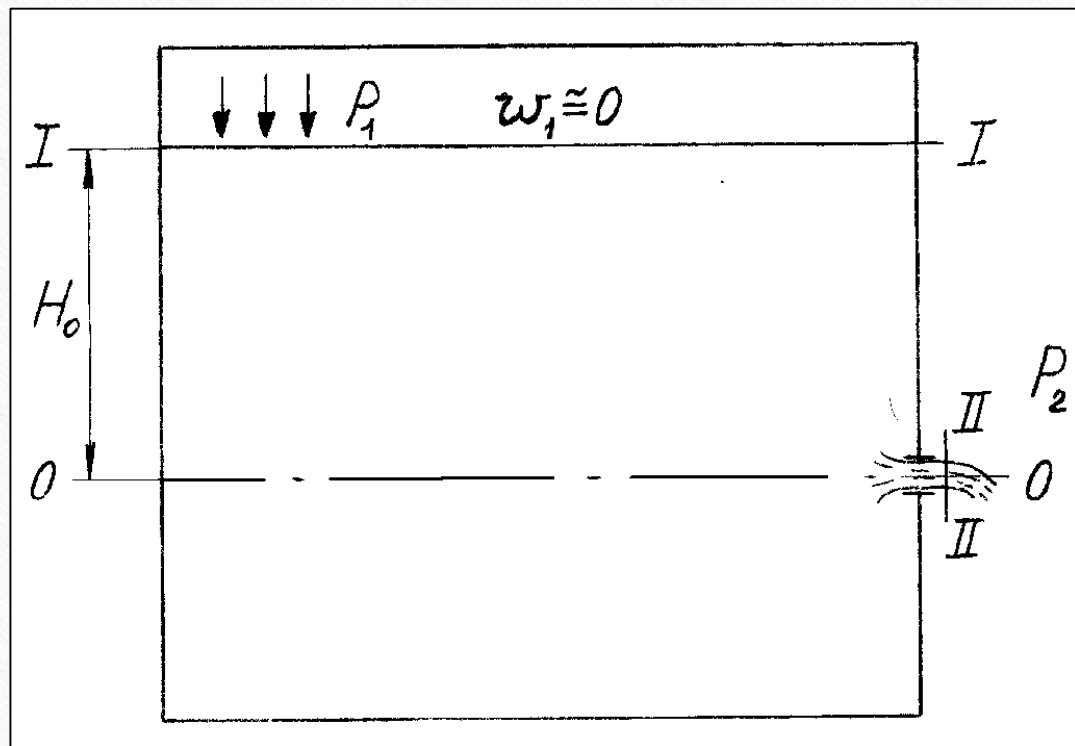
# Геометрические характеристики истечения капельной жидкости

Если истечение жидкости происходит в атмосферу, то отверстие, называется *незатопленным* (а), если истечение происходит в другую жидкость или газ, отверстие называется *затопленным* (б).





## 6.5.2. Истечение через малое отверстие при постоянном напоре



Запишем уравнение Бернулли для сечений I-I и II-II:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha w_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha w_{cp2}^2}{2g} + \Delta h_{1-2} ,$$



## Истечение через малое отверстие при постоянном напоре

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha w_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha w_{cp2}^2}{2g} + \Delta h_{1-2} ,$$

Учитывая, что  $w_{cp1} = 0$ ,  $Z_1 = H_0$ ,  $Z_2 = 0$ :

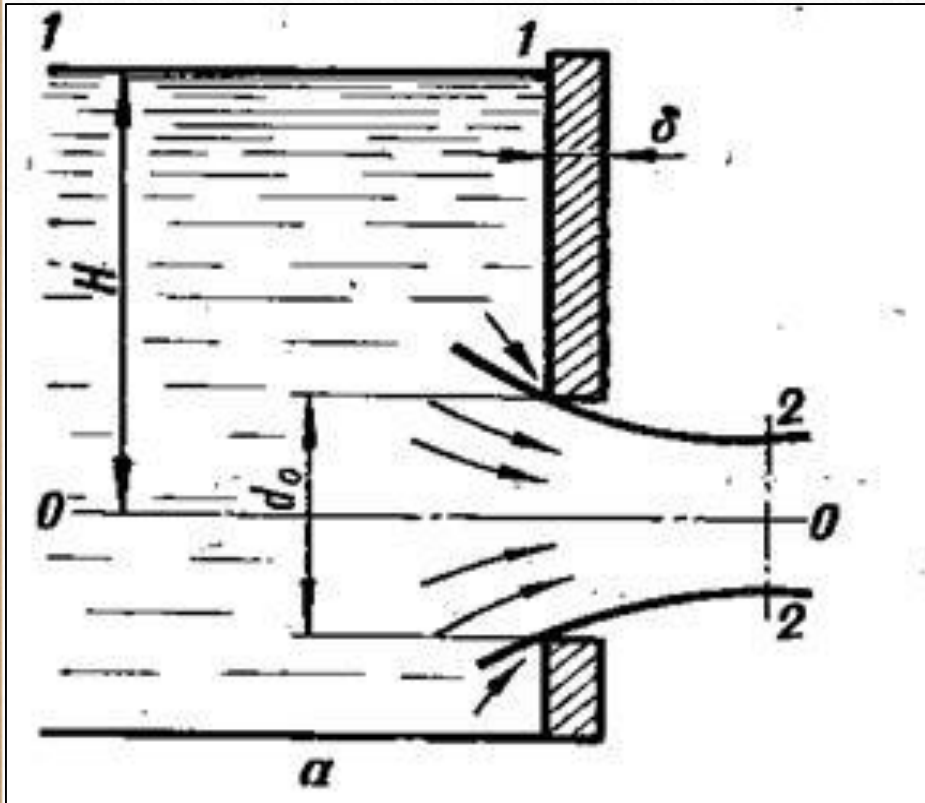
$$H_0 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{w_{cp2}^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$\Delta h_{(1-2)} = \Delta h_{отв} = \zeta_{отв} \frac{w_{cp}^2}{2g} .$$

Обозначим:

$$H_0 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = H \longrightarrow H = \frac{\alpha_2 w_{cp2}^2}{2g} + \frac{\xi_{отв} w_{cp2}^2}{2g}$$

## Истечение через малое отверстие при постоянном напоре



$$w_{cp} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \xi_{отв}}} \sqrt{2gH} = \varphi_{отв} \sqrt{2gH}$$

$$\varphi_{отв} = (\alpha_2 + \xi_{отв})^{-\frac{1}{2}} \text{ - коэффициент скорости для отверстия}$$

$$\varepsilon_{отв} = \frac{S_{\min \text{ струи}}}{S_{отв}}$$

$$S_{\min} \text{ - коэффициент сжатия струи}$$

$$Q = \mu_{отв} S_{отв} \sqrt{2gH}$$



$$\mu_{отв} = \varphi_{отв} \varepsilon_{отв} < 1$$



### 6.5.3. Истечение через насадки

**Насадок – короткая трубка, которая присоединяется к отверстию с целью изменения характеристик истечения.**

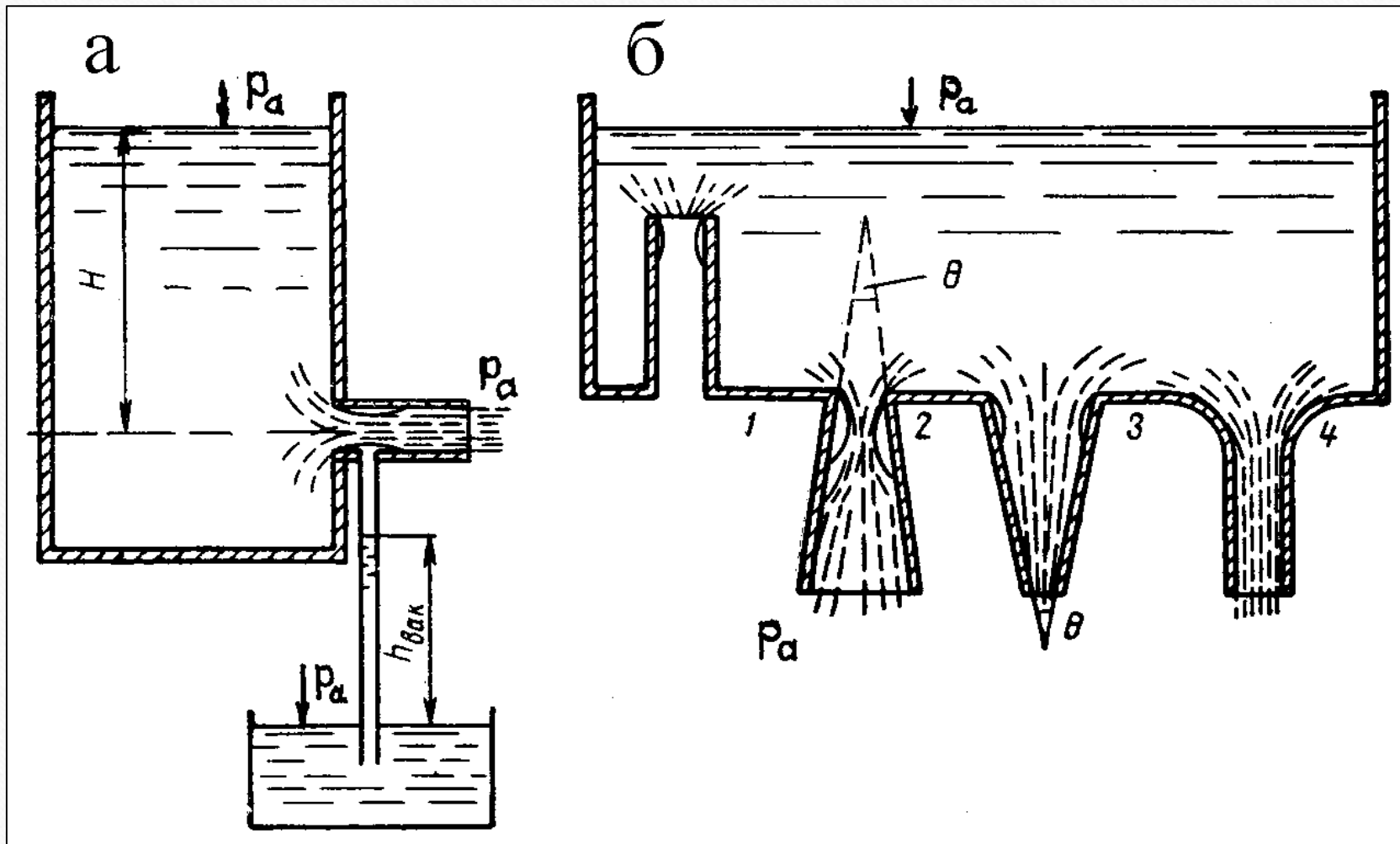
Расход при истечении через насадки вычисляется по формуле 

В технике находят применение следующие основные типы насадков: *внешний цилиндрический* (насадок Вентури), *внутренний цилиндрический* (насадок Борда), *конический сходящийся*, *конический расходящийся* и *коноидальный*.

Величина коэффициентов, характеризующих истечение через насадки, зависит от типа насадка и режима движения жидкости.

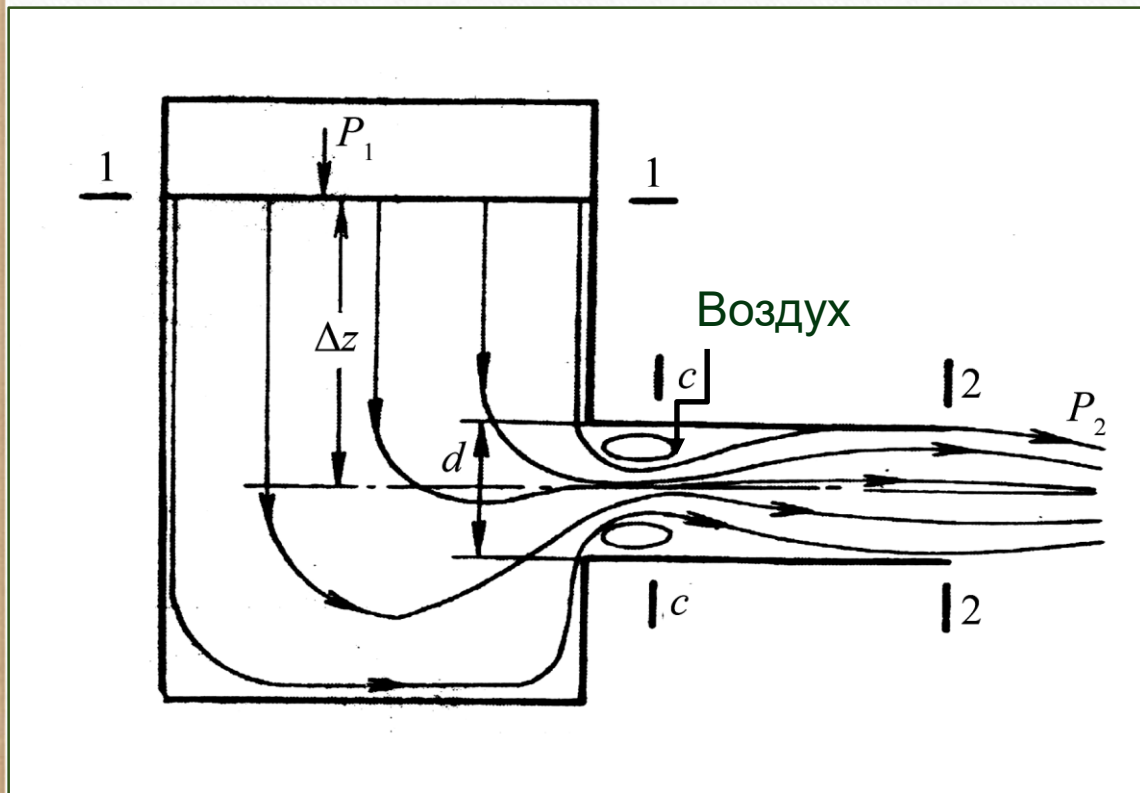


## Истечение через насадки



## Истечение через насадки

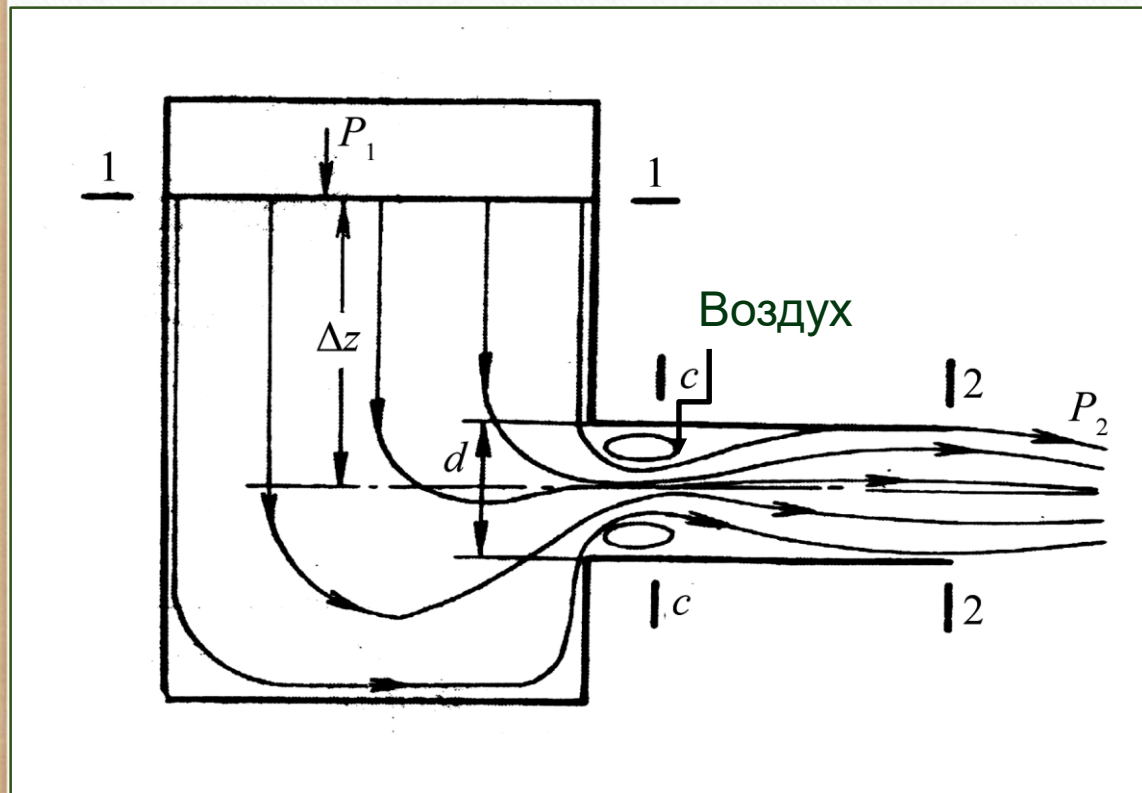
### Внешний цилиндрический насадок Вентури



При обтекании острой входной кромки насадка частицы жидкости, двигавшиеся непосредственно у стенок резервуара, так же, как и при истечении из отверстия, в результате инерции отрываются у входной кромки от стенок насадка. Между струёй и стенками канала образуется мёртвая зона.

## Истечение через насадки

### Внешний цилиндрический насадок Вентури

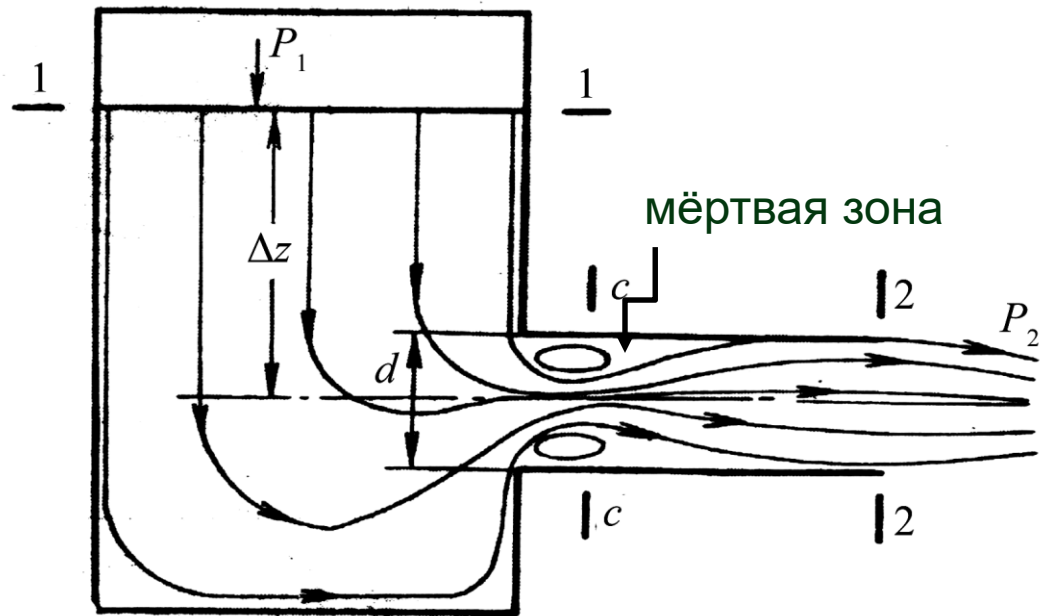


В результате отрыва струи от острой кромки отверстия она испытывает сжатие, поэтому стенок насадка она касается на расстоянии от 1,0 до 1,5 его диаметра.



## Истечение через насадки

### Внешний цилиндрический насадок Вентури



При истечении в атмосферу в «мёртвой зоне» образуется разрежение, и в насадке генерируется так называемый эффект подсосывания жидкости из резервуара, что приводит к увеличению расхода.

## Внешний цилиндрический насадок Вентури

Однако наличие самого насадка увеличивает гидравлическое сопротивление для струи жидкости, т.к. в самом насадке появляются потери напора по длине трубки. Если трубка имеет ограниченную длину, то влияние подсосывающего эффекта с лихвой компенсирует дополнительные потери напора по длине. По этой причине длина насадков ограничивается  $l = (3 - 5)d$ .

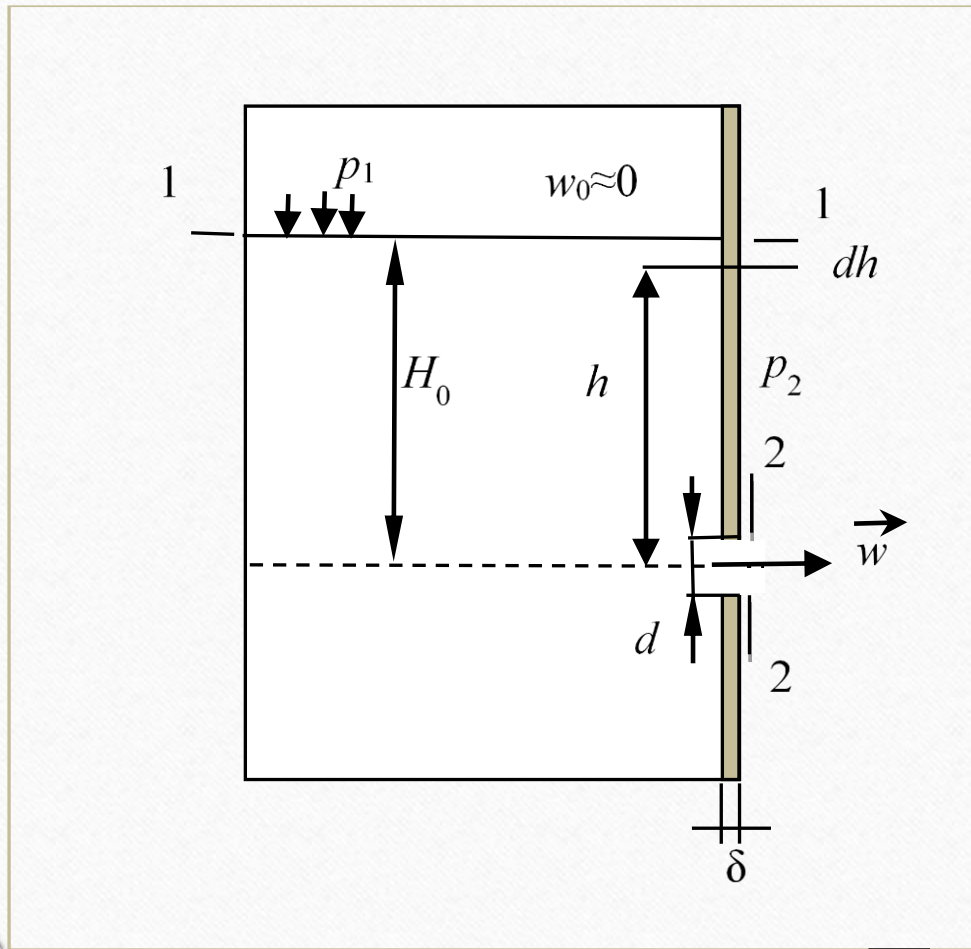


## Характеристики истечения через различные типы насадков

Тип насадка или отверстия	Величина коэффициентов		
	$\varepsilon$	$\varphi$	$\mu$
Малое круглое отверстие в тонкой стенке	0,64	0,97	0,62
Внешний цилиндрический насадок	1,0	0,82	0,82
Внутренний цилиндрический насадок	1,0	0,71	0,71
Конический расходящийся насадок при $\theta = 5^\circ - 7^\circ$	1,0	0,45– 0,50	0,45– 0,50
Конический сходящийся насадок при $\theta = 13^\circ - 14^\circ$	0,98	0,96	0,94
Коноидальный насадок	1,0	0,98	0,98



## 6.5.4. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при переменном напоре



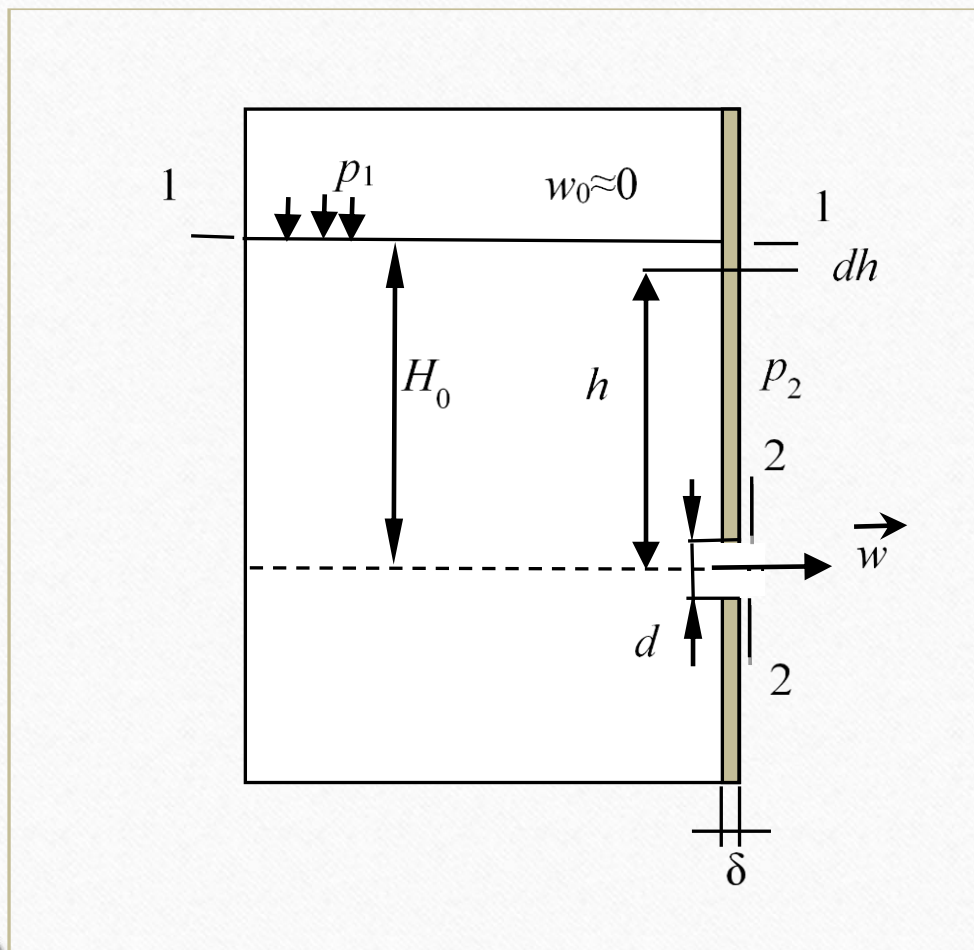
$$Q = \mu_{отв} S_{отв} \sqrt{2gH}$$

Объём жидкости, вытекающей за элементарный промежуток времени  $dt$ :  $dV = -Qdt$

За это время уровень в баке понизится на  $dh$ , поэтому  $dV = Sdh$ .

$$Sdh = -\mu_{отв} S \sqrt{2gh} dt$$

## Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при переменном напоре

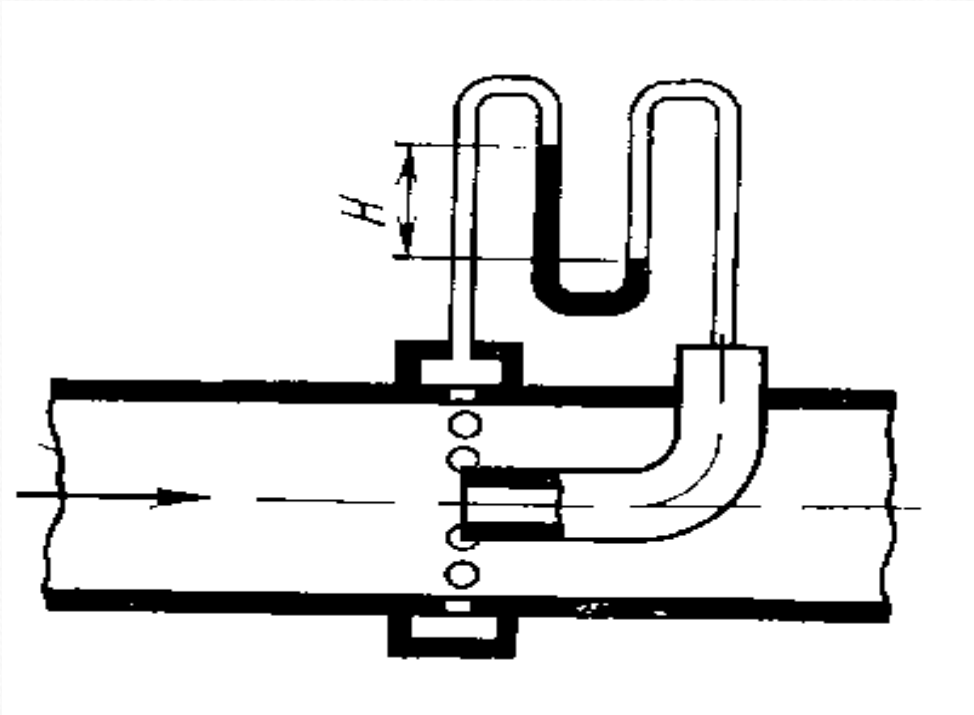


Интегрируя последнее выражение от  $H_0$  до 0, найдем время опорожнения резервуара высотой  $H$ :

$$t = \frac{2SH_0}{\mu_{\text{отв}} S_{\text{отв}} \sqrt{2gH_0}}.$$

## 6.6. Измерение скорости и расхода жидкости

### Трубка Пито:



$$\Delta p = \frac{\rho_{\text{ж}} w^2}{2}$$

$$\Delta p = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}}) g H$$

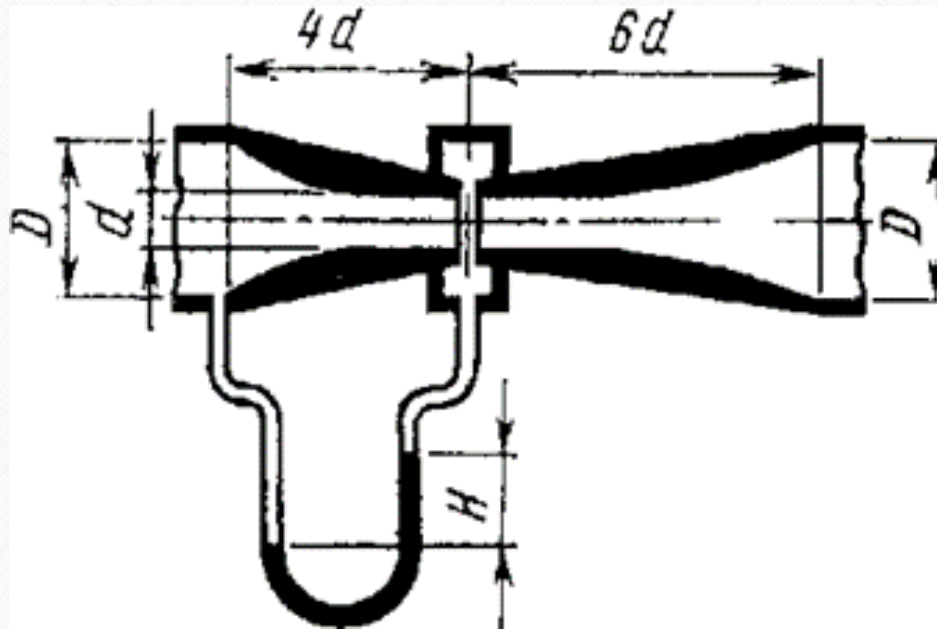
$$\frac{\rho_{\text{ж}} w^2}{2} = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}}) g H$$

$$w = \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}}) g H}{\rho_{\text{ж}}}}$$



# Измерение скорости и расхода жидкости

## Расходомер Вентури:

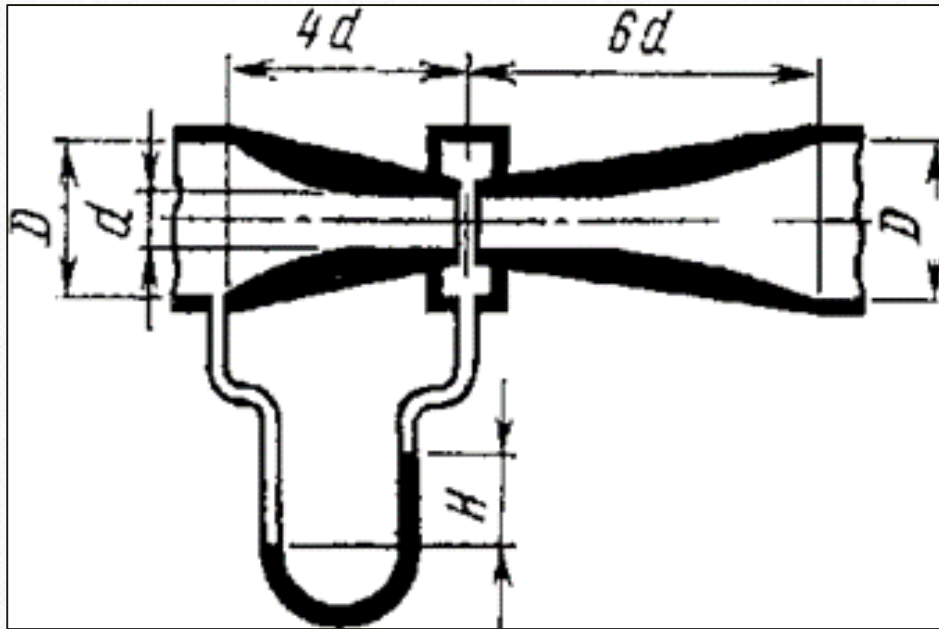


Напишем уравнение Бернулли для первого (широкого) и второго (узкого) сечений:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$

# Измерение скорости и расхода жидкости

## Расходомер Вентури:



Здесь  $z_1 = z_2$ , так как труба горизонтальна.

Найдём скорости:

$$w_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}; \quad w_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}.$$

Подставим в

уравнение Бернулли:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_2}{\rho \cdot g} = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} - \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = \frac{16Q^2}{2 \cdot g \pi^2} \left( \frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right)$$

# Измерение скорости и расхода жидкости

## Расходомер Вентури:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{p_2}{\rho \cdot g} = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} - \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = \frac{16Q^2}{2 \cdot g \pi^2} \left( \frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right)$$

$$\Delta p = \frac{8\rho_{\text{ж}}Q^2}{\pi^2} \frac{d_1^4}{d_2^4} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)$$

$$\Delta p = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gH$$

$$(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gH = \frac{8\rho_{\text{ж}}Q^2}{d_1^4 \cdot \pi^2} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)$$



# Измерение скорости и расхода жидкости

## Расходомер Вентури:

$$(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gH = \frac{8\rho_{\text{ж}}Q^2}{d_1^4 \cdot \pi^2} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)$$

$$Q = \sqrt{\frac{(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gH \cdot d_1^4 \cdot \pi^2}{8\rho_{\text{ж}} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}} = \frac{\pi d_1^4}{4} \sqrt{\frac{2(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}})gH}{\rho_{\text{ж}} \left( \frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}}$$

# Измерение скорости и расхода жидкости

## Расходомер Вентури:

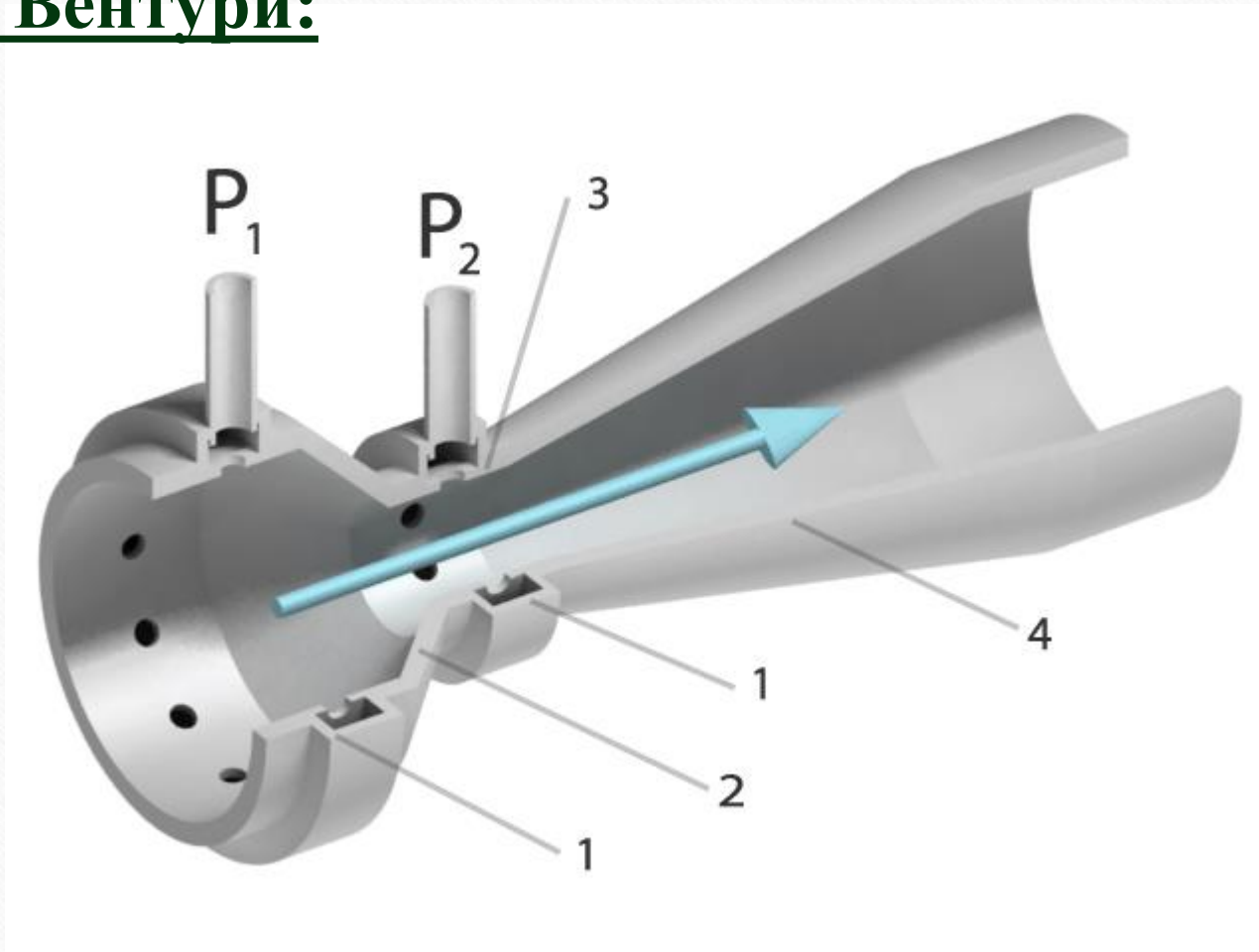
ИЛИ

$$Q = \frac{\pi d_2^4}{4} \sqrt{\frac{2(\rho_{рт} - \rho_{ж})gH}{\rho_{ж}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right)}}$$

$$Q = c S_2 \sqrt{\frac{2(\rho_{рт} - \rho_{ж})gH}{\rho_{ж}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right)}}$$

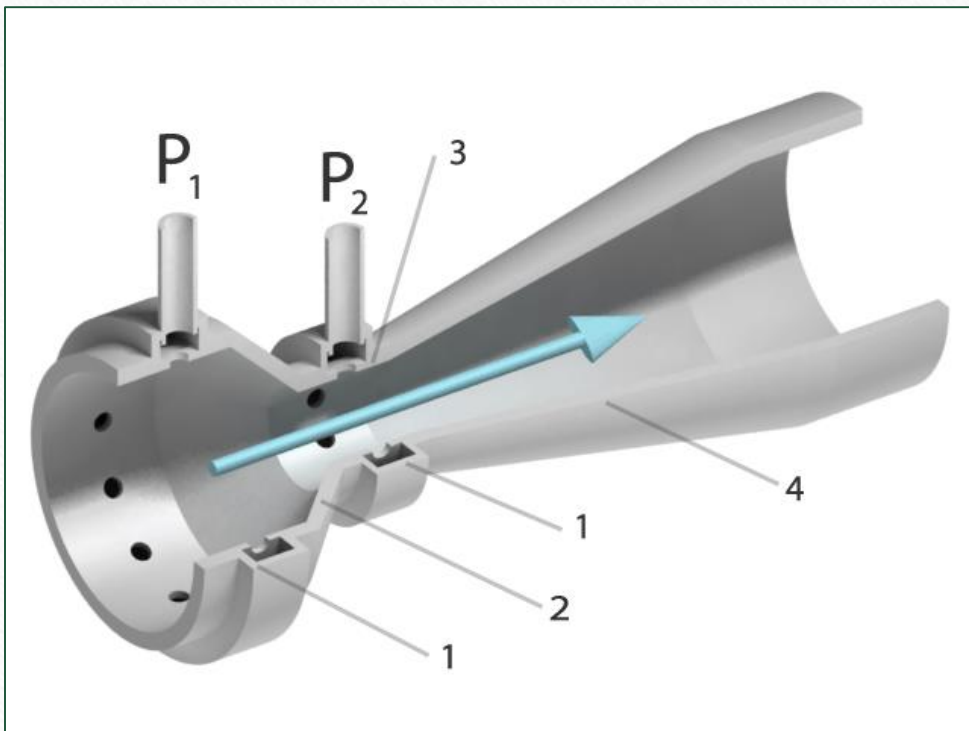
$c$  — экспериментальный коэффициент, отражающий потери внутри расходомера.

## Расходомер Вентури:





## Расходомер Вентури:



$$Q = C S_2 \sqrt{\frac{2(\rho_{рт} - \rho_{ж})gH}{\rho_{ж}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right)}}$$

Трубка Вентури состоит из входного конуса конфузора (2), горловины (3) и диффузора (4). Для выравнивания давления на периферии горловины и входной конус имеют кольцевые усредняющие камеры (1), в нижней части которых устанавливают приспособления для спуска жидкости. Отводы от трубы подключают к дифференциальному манометру.

## ***6.7. Гидравлический удар в трубопроводе***

**Гидравлическим ударом** называется резкий скачок давления в трубопроводе, вызванный внезапным изменением скорости, и распространяющийся по трубопроводу в виде ударной волны.



# Гидравлический удар в трубопроводе

Причиной гидравлического удара может быть быстрое закрытие на трубопроводе запорных устройств (кранов, клинкетов, клапанов), внезапная остановка вращающегося ротора турбины, компрессора, насоса и т.п.

**Формула Жуковского:**  $\Delta p = a \cdot \Delta w_{cp} \cdot \rho$

$\Delta w_{cp}$  - изменение средней скорости движения жидкости;

$a$  - скорость распространения ударной волны (м/с):



## Гидравлический удар в трубопроводе

$$\Delta p = a \cdot \Delta w_{cp} \cdot \rho$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_1} + \frac{d}{\delta} \frac{1}{E_2} \right)}}$$

$d, \delta$  - диаметр и толщина трубы, м

$E_1, E_2$  - модули упругости жидкости и материала трубы, Па

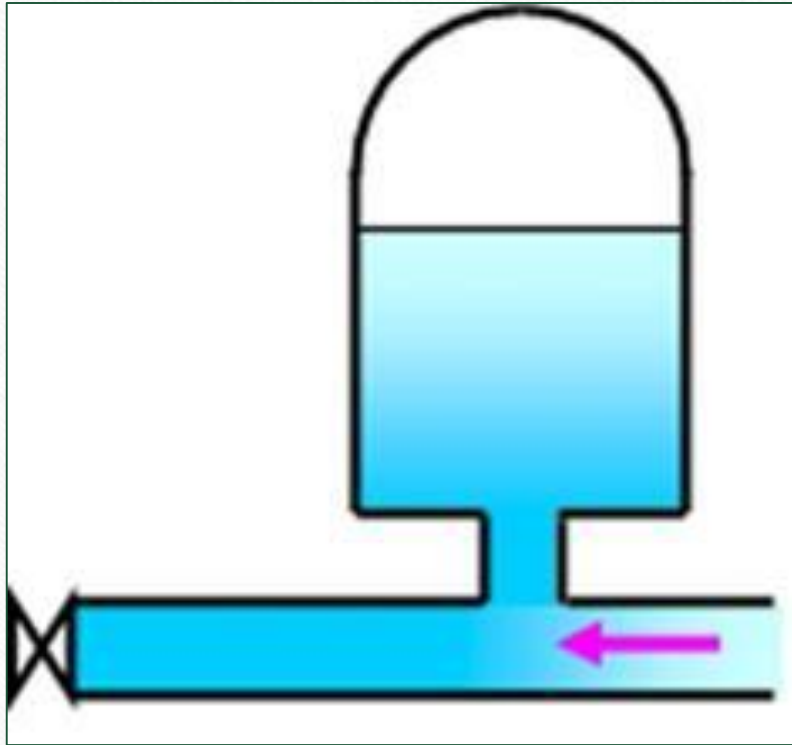
$\rho$  - плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>

$\Delta p$  - скачок давления, Па.

## **Способы предотвращения гидравлического удара**

Гидравлический удар может вызвать разрыв трубопроводов, разрушение деталей гидравлических машин и приборов, нарушение работы отдельных устройств гидросистем (реле времени, реле давления, распределителей, гидрозамков и др.).

## Способы предотвращения гидравлического удара



Для ослабления вредного влияния гидравлического удара на прочность трубопровода, применяют различного типа предохранительные клапаны и воздушные колпаки, устанавливаемые вблизи запорных устройств, являющихся источником гидравлических ударов.



## Способы предотвращения гидравлического удара

В воздушном колпаке энергия, возникающая от ударного повышения давления, расходуется на сжатие воздуха в колпаке. По принципу действия предохранительные клапаны и воздушные колпаки амортизируют удары, возникающие в жидкости, отводя некоторый объем жидкости из трубопровода в момент удара.

Кроме того, использование этих устройств позволяет локализовать распространение ударной волны в пределах расстояния от запорного устройства до места установки воздушного колпака или предохранительного клапана.

# Способы предотвращения гидравлического удара

Для предотвращения гидроудара применяют ряд методов:

- обеспечение плавного открытия или закрытия запорной арматуры;
- увеличение диаметра трубопровода;
- снижение скорости потока среды;
- обеспечение плавного пуска и остановки насосов;
- удаление газов из трубопроводов.



# **Контрольные вопросы**

1. Что такое гидравлические потери?
2. Какие виды гидравлических потерь Вы знаете?
3. По какой формуле можно определить гидравлические потери на трение?
4. Что такое лобовое сопротивление?
5. Что такое подъемная сила?
6. Что такое угол атаки?
7. В каком случае отверстие, из которого происходит истечение жидкости, называется малым?



## ***Контрольные вопросы***

8. Как определить расход при истечении жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре?

9. Как определить скорость при истечении жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре?

10. Дайте определение гидравлического удара в трубопроводе.

11. От чего зависит скорость распространения ударной волны?

## Глава 7.

# ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОМЕХАНИКИ

### Задача 1.

Определить относительное изменение плотности морской воды (в процентах) при вертикальном погружении на глубину  $h = 300$  м. Плотность морской воды на поверхности  $\rho_0 = 1030$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент объёмного сжатия воды  $\beta_p = 0,45 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>.

### *Решение*

$$p_{\text{изб}_h} = h\rho g = 300 \cdot 1030 \cdot 9,81 = 3031290,6 \text{ Па} = 30,313 \text{ бар.}$$

## Задача 1.

*По определению:*

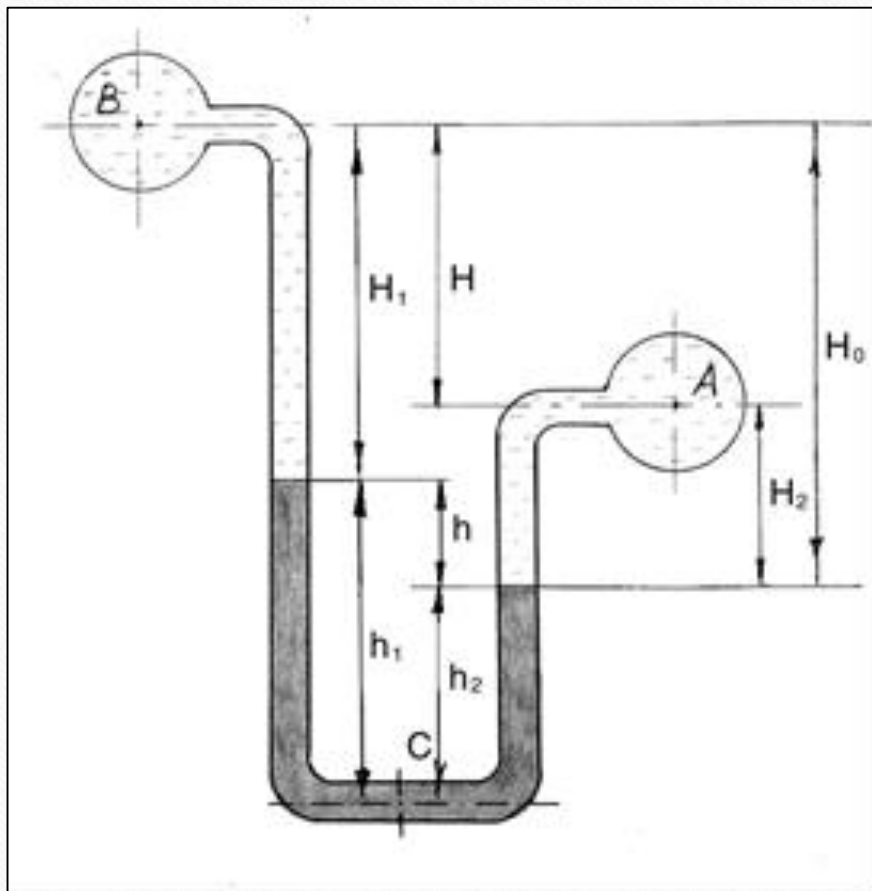
$$\beta_p \Delta p = \frac{\Delta \rho}{\rho_0},$$

где  $\Delta p = \rho_{\text{изб}} g h.$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = 0,45 \cdot 10^{-9} \cdot 30 \cdot 10^5 = 13 \cdot 10^{-4} = 0,13 \ %.$$

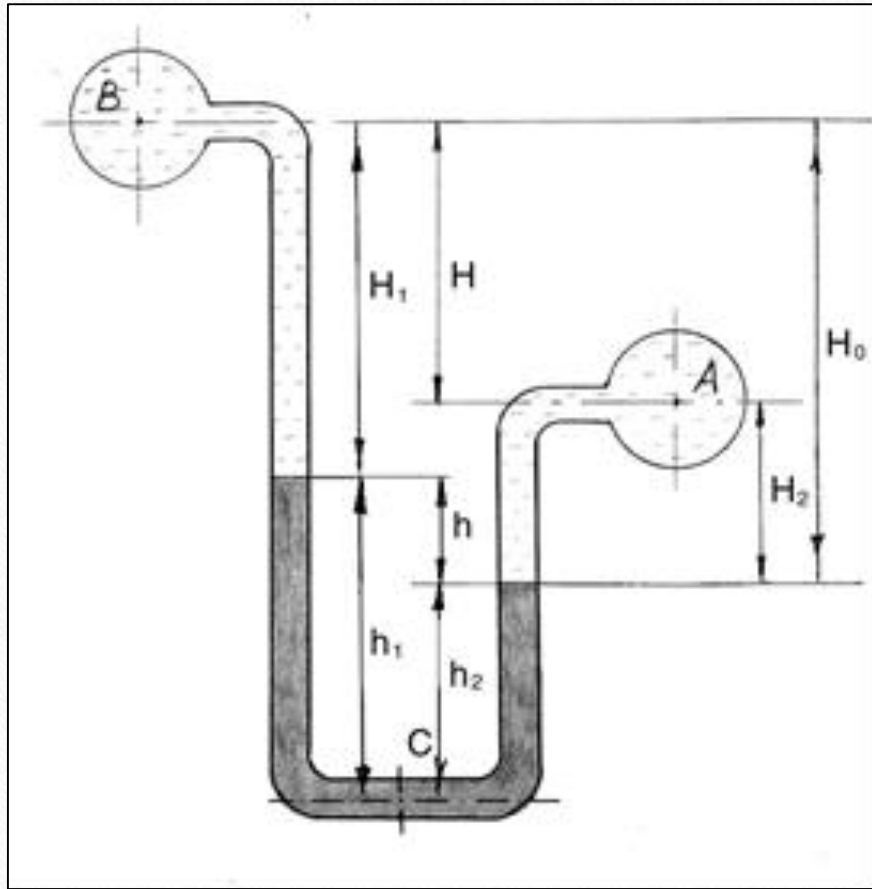


## Задача 2.



Определить разность давлений в точках, находящихся на осях труб А и В, наполненных водой, если разность уровней ртути  $h=30$  см. Разность уровней осей труб  $H=100$  см,  $\rho_{\text{рт}}=13600$  кг/м<sup>3</sup>

## Задача 2.



условие равновесия:

$$p_B + \rho_{\epsilon} g H_1 + \rho_{pm} g h_1 = p_A + \rho_{\epsilon} g H_2 + \rho_{pm} g h_2$$

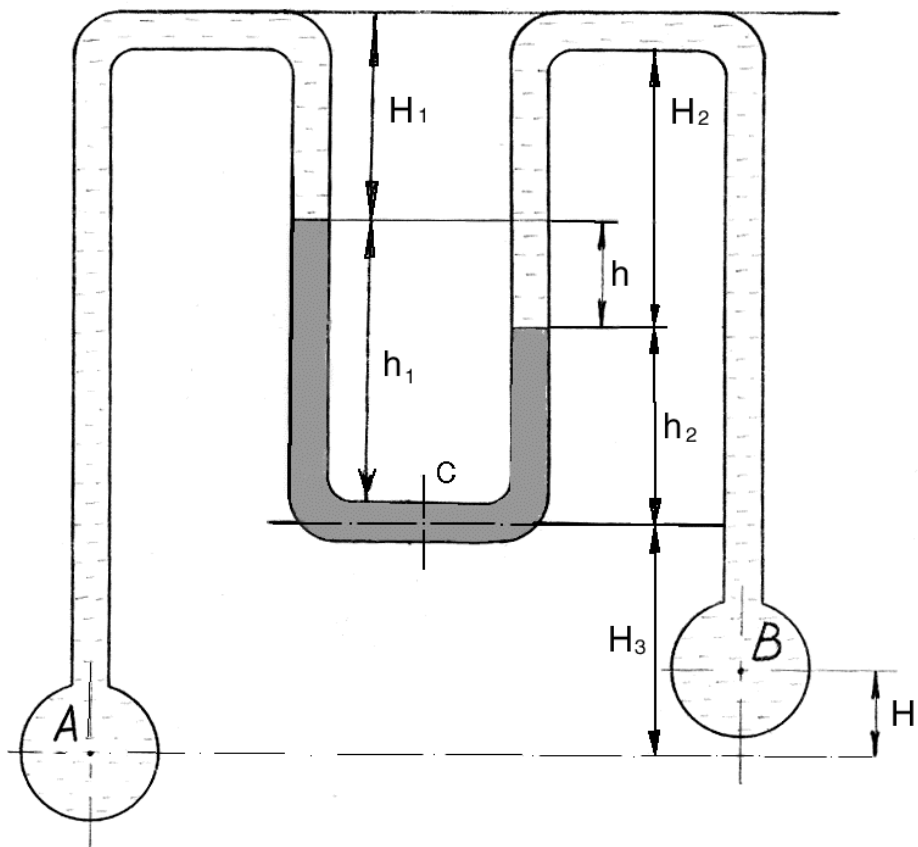
$$\Delta p = p_A - p_B = \rho_{\epsilon} g (H_1 - H_2) + \rho_{pm} g (h_1 - h_2)$$

$$H_1 = H_0 - h, \quad H_2 = H_0 - H$$

$$H_1 - H_2 = H - h, \quad h_1 - h_2 = h$$

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho_{\epsilon} g (H - h) + \rho_{pm} g h = 1000 \cdot 9.8 \cdot 0.7 + 13600 \cdot 9.8 \cdot 0.3 = 46844 \text{ Па}$$

### Задача 3.

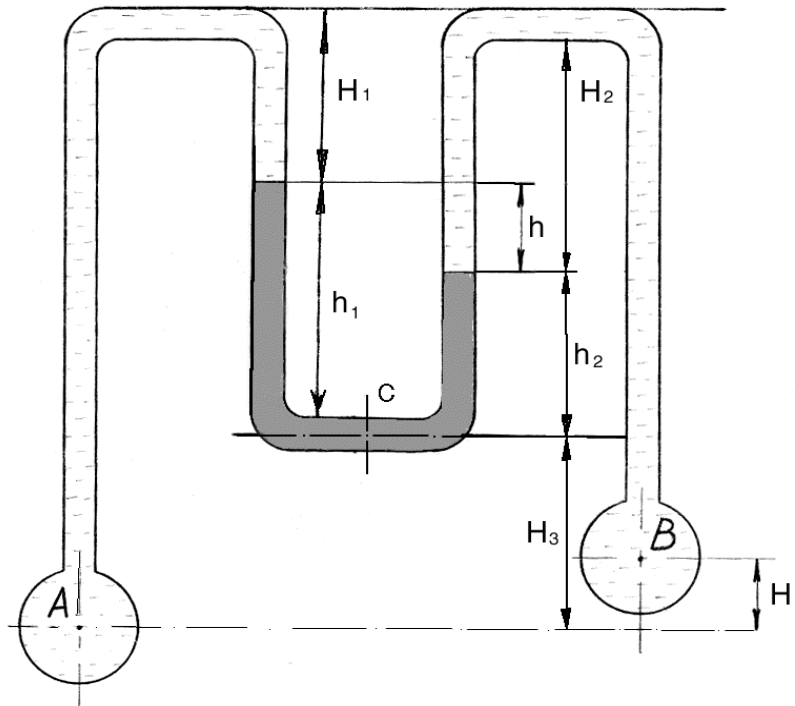


Высота столба ртути, измеренная по дифференциальному манометру, равна  $h=50$  см. Определить разность давлений в точках А и В, если  $H=30$  см.

Трубы заполнены водой.



### Задача 3.



**Решение:**

Давление на точку С слева по основному уравнению гидростатики:

$$P_C = P_A - \rho_B g(H_1 + h_1 + H_3) + \rho_B g H_1 + h_1 \rho_{ptm} g.$$

Давление на точку С справа:

$$P_C = P_B - \rho_B g(H_1 + h_1 + H_3 - H) + \rho_B g(H_1 + h) + h_2 \rho_{ptm} g.$$

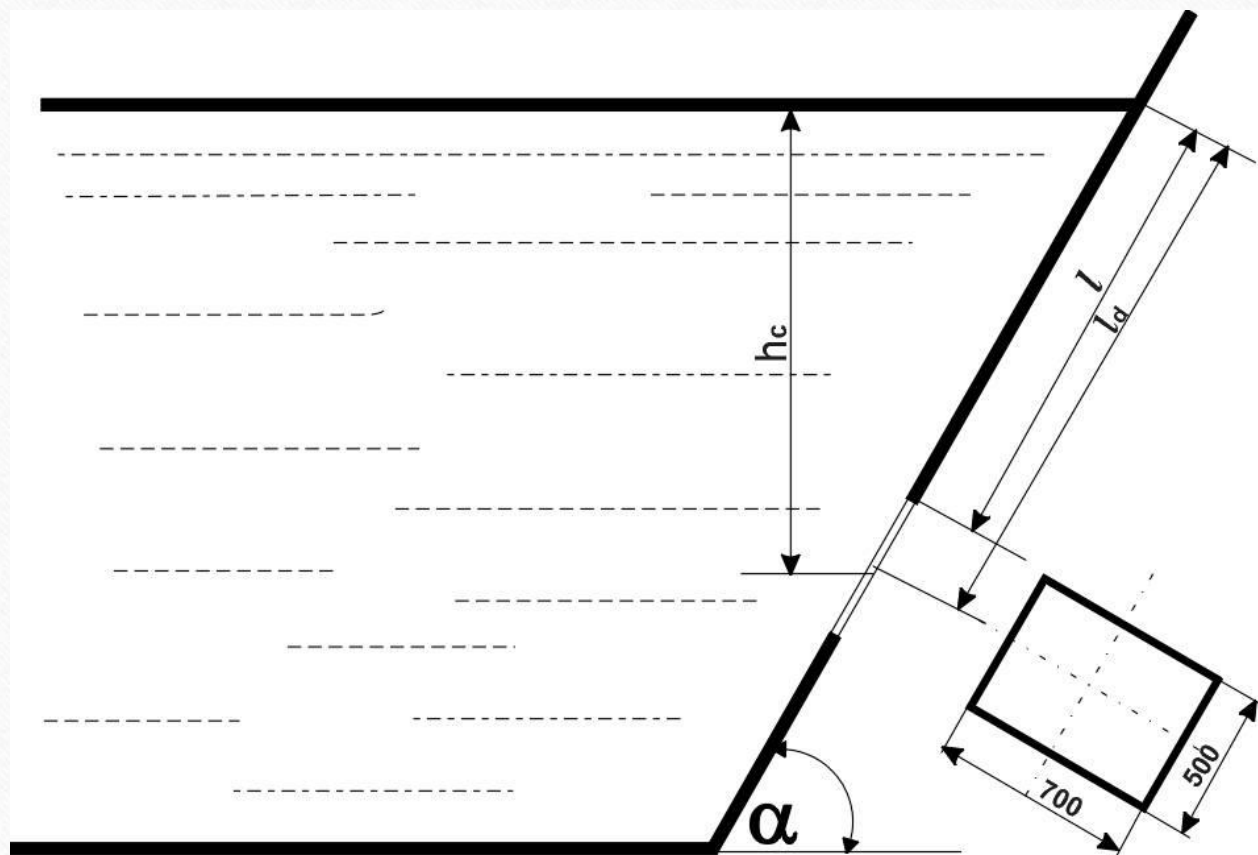
$$P_A - \rho_B g(H_1 + h_1 + H_3) - \rho_B g H_1 + h_1 \rho_{ptm} g =$$

$$= P_B - \rho_B g(H_1 + h_1 + H_3 - H) + \rho_B g(H_1 + h) + h_2 \rho_{ptm} g$$

$$\Delta P = P_B - P_A = \rho_{ptm} g(h_1 - h_2) - \rho_B g(H + h) = \rho_{ptm} g h - \rho_B g(H + h)$$

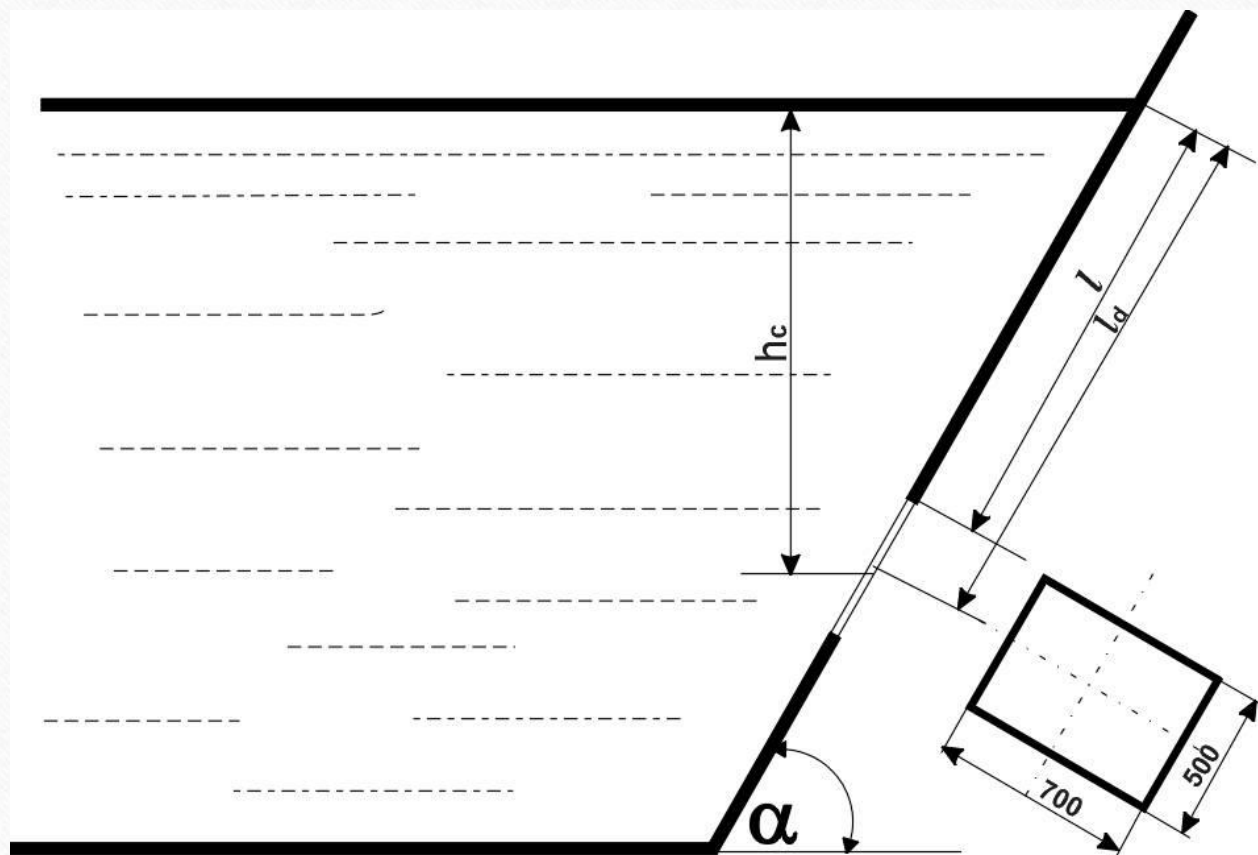
$$\Delta P = 9,81(13600 \cdot 0,5 - 0,8 \cdot 1000) = 58800 \text{ Па.}$$

## Задача 4.



Определить силу гидростатического давления воды на крышку лаза в наклонной стенке танка. Размеры лаза - 700х500 мм, расстояние  $l=2,0$  м, угол  $\alpha = 60^{\circ}$ . Вычислить также координату центра давления.

## Задача 4.

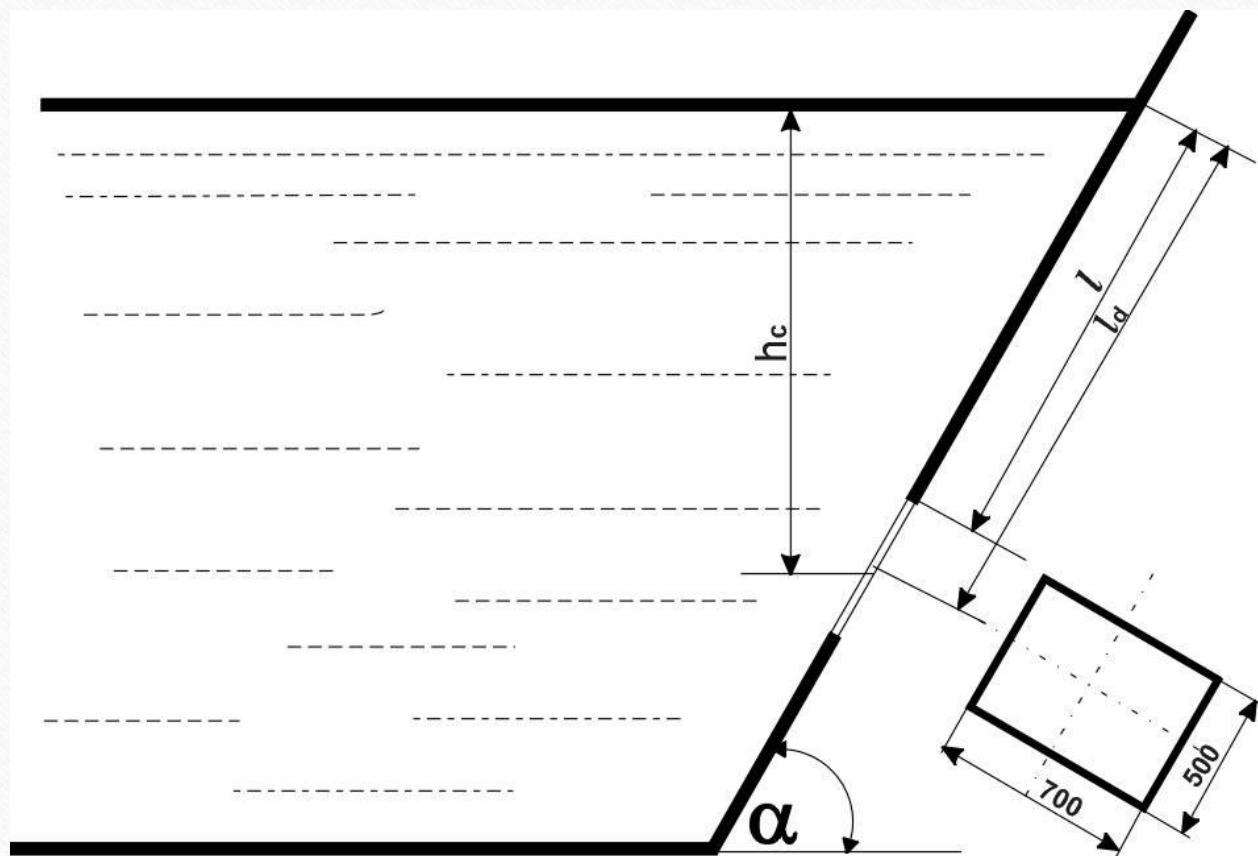


$$F = (p_0 + \rho g h_c) S$$

Нужно ли искать силу давления  $F_0$ ?



## Задача 4.



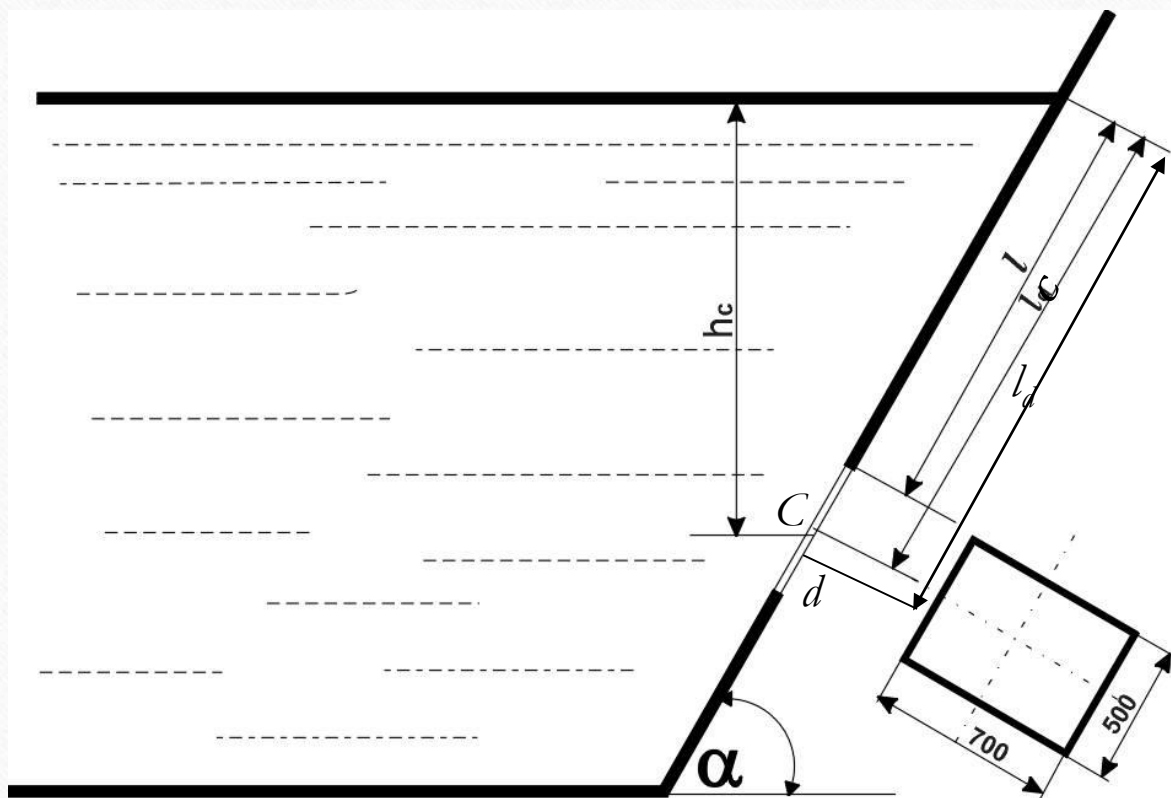
$$F_{\text{изб.}} = \rho g h_c \cdot S$$

$$h_c = l_c \sin \alpha, \quad h_c = \left( l + \frac{h_l}{2} \right) \cdot \sin 60^\circ$$

где  $h_l$  - ВЫСОТА КРЫШКИ

$$F_{\text{изб}} = \rho g \left( l + \frac{h_l}{2} \right) \cdot \sin 60^\circ \cdot S$$

## Задача 4.



Момент инерции для  
прямоугольника:

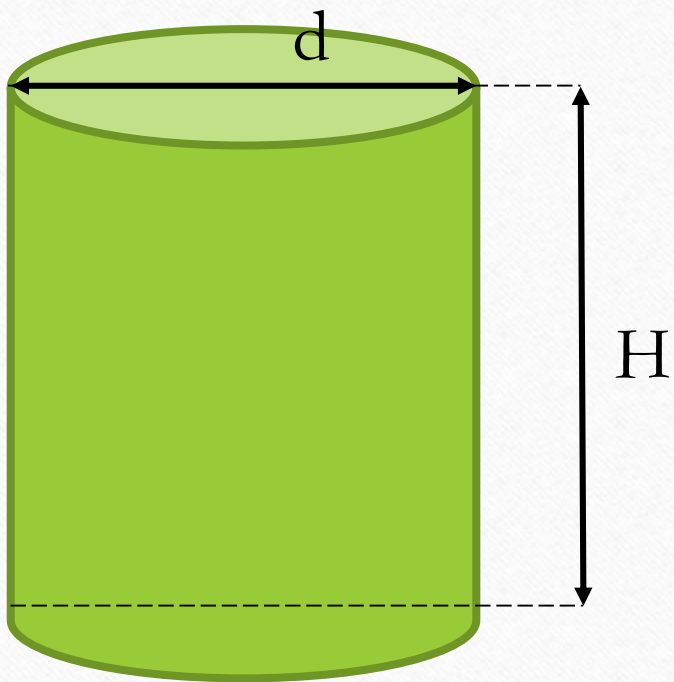
$$J_c = \frac{bh_l^3}{12}$$

Координата центра давления, м

$$l_d = l_c + \frac{h_l^2}{12 \cdot l_c} = 2.25 + \frac{0.5^2}{12 \cdot 2.25} = 2.259$$

т.е. центр давления находится  
на 9 мм ниже центра тяжести.

## Задача 5.



Топливный танк цилиндрической формы емкостью  $V = 400 \text{ м}^3$  и высотой  $H = 5 \text{ м}$  заполнен топливом плотностью  $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ . Определить силы гидростатического давления топлива на боковую стенку и дно танка.

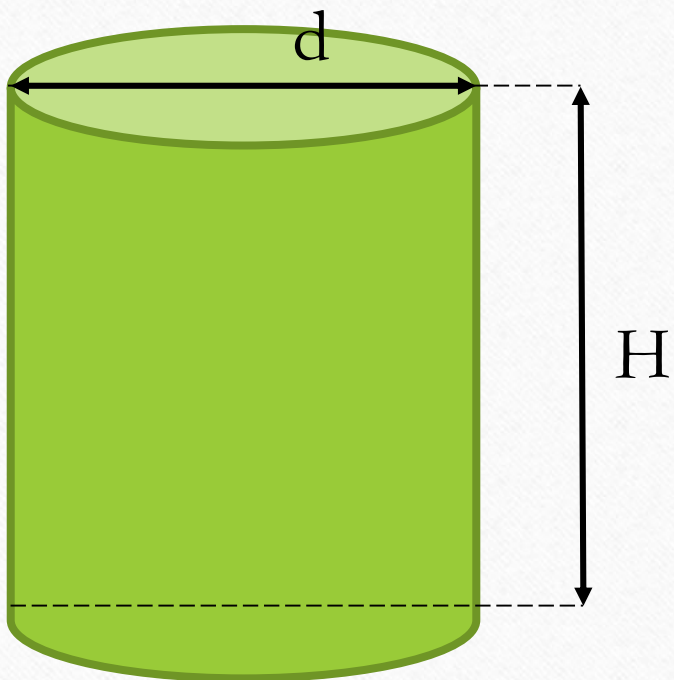
### Решение

Найдем диаметр танка

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi H}}.$$



## Задача 5.



Сила давления топлива на боковую стенку  $F_{гор.} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$

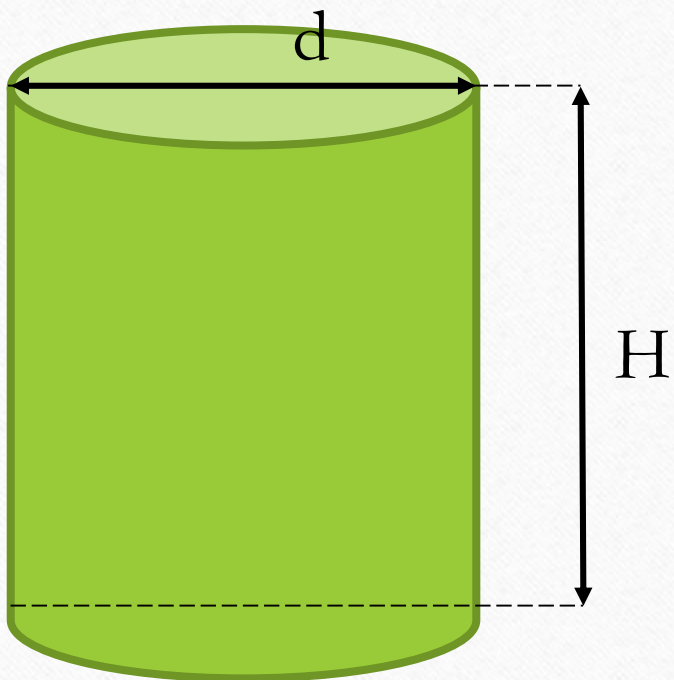
(в данном случае  $S_{верт}$  - это площадь прямоугольника высотой  $H$  и шириной  $d$ )

$$S_{верт} = Hd$$

Сила давления топлива на боковую стенку:

$$F_{изб.} = \rho g H^2 \sqrt{\frac{V}{\pi H}} = 90 \cdot 9,8 \cdot 5^2 \sqrt{\frac{400}{3,14 \cdot 5}} = 1,13 \text{ МН.}$$

## Задача 5.



Сила давления топлива на дно резервуара

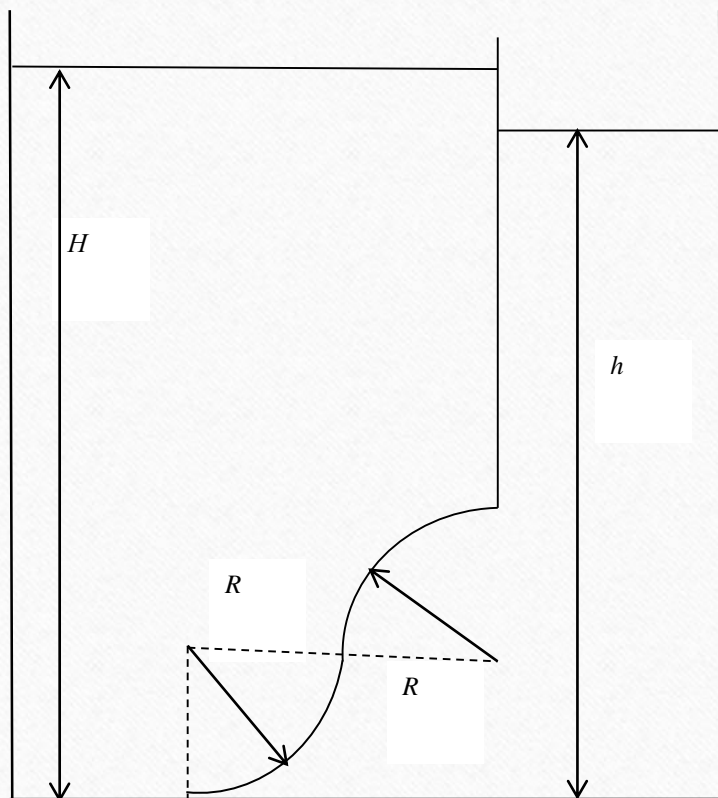
$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

(в данном случае  $V_m$  совпадает с объёмом цилиндра).

Сила давления топлива на дно:

$$F = \rho g V = 900 \cdot 9,8 \cdot 400 = 3,528 \text{ МН.}$$

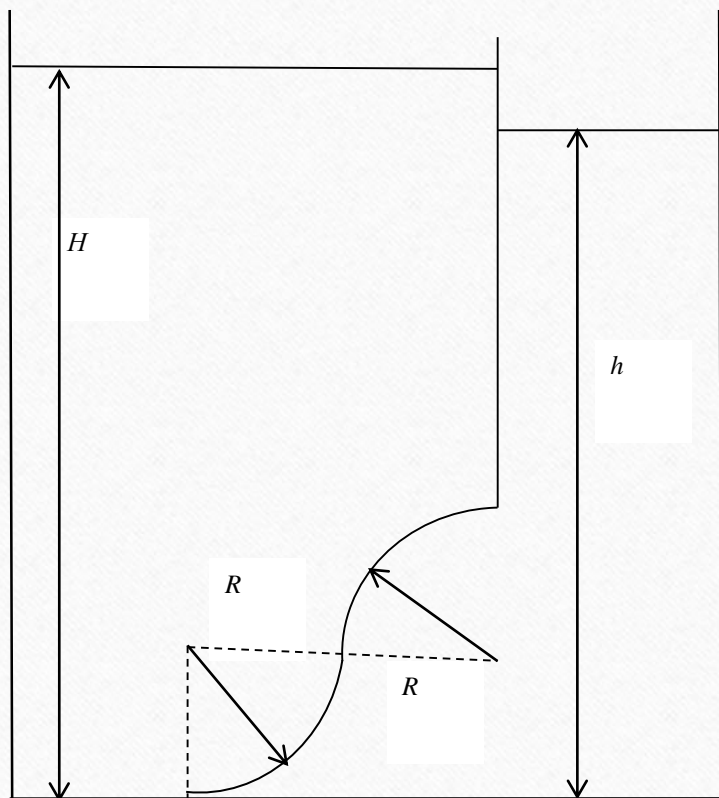
## Задача 6.



Определите силу избыточного давления воды на изогнутую часть перегородки, если с обеих сторон перегородки находится вода,  $R = 1$  м,  $h = 3$  м,  $H = 5$  м, ширина перегородки  $l = 3$  м.



## Задача 6.

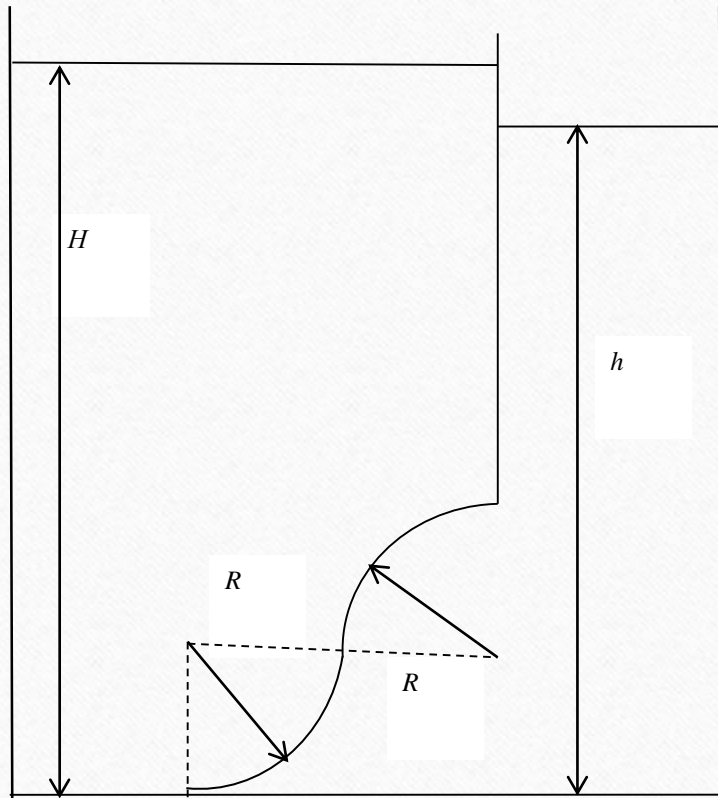


**Решение**  $F_{гор.} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$

Вертикальная проекция криволинейной стенки представляет собой прямоугольник высотой  $2R$  и шириной  $l$ . Центр тяжести этого прямоугольника находится на расстоянии  $R$  от дна, и на расстоянии  $(H - R)$  от свободной поверхности воды в левой части танка. Подставим значения в формулу

$$F_{\Gamma_{лев}} = S_{В} \rho g h_c = 2R \cdot l \rho g (H - R),$$

## Задача 6.



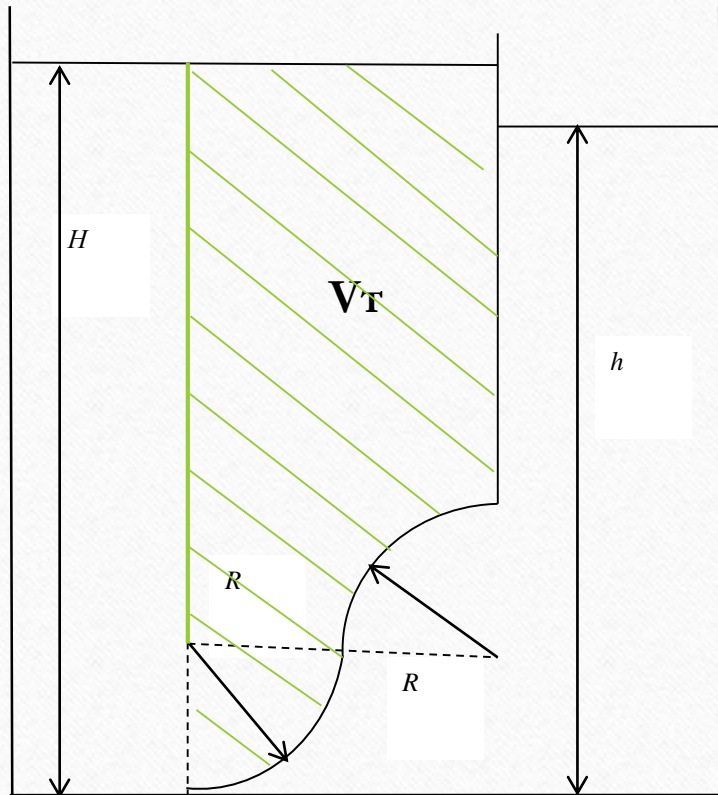
Аналогично найдём горизонтальную составляющую силы избыточного давления справа:

$$F_{\Gamma_{\text{прав}}} = S_{\text{В}} \rho g h_c = 2R \cdot l \rho g (h - R).$$

Горизонтальная составляющая результирующей силы давления:

$$\begin{aligned} F_{\Gamma} &= F_{\Gamma_{\text{лев}}} - F_{\Gamma_{\text{прав}}} = 2R \cdot l \rho g (H - h) = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 9.8 (5 - 3) = 117,6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

## Задача 6.



Найдём вертикальную составляющую силы избыточного давления по формуле

$$F_{\text{верт.}} = \rho g V_m$$

Объём тела давления слева: :

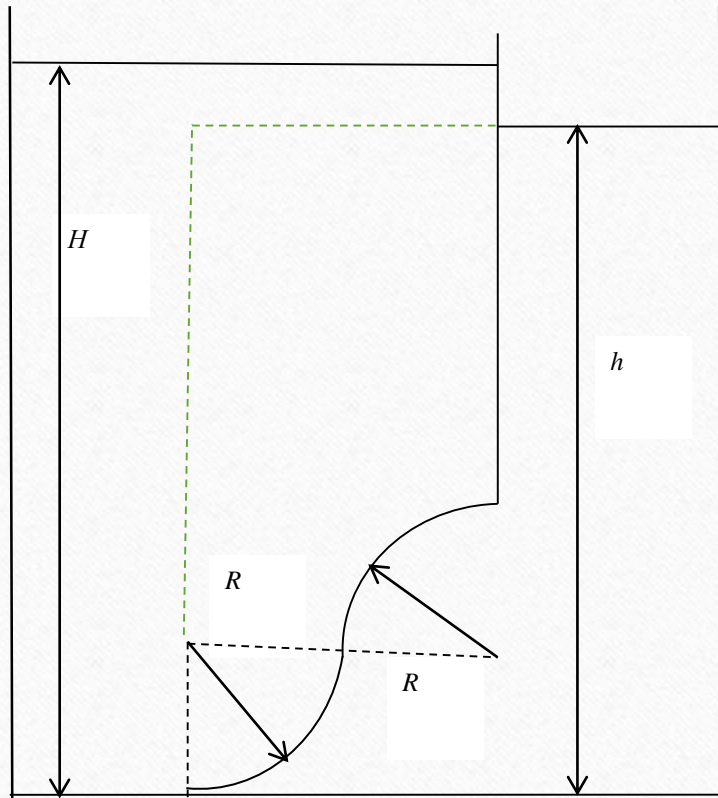
$$V_m = (\pi R^2 / 4 + 2R(H - R) - \pi R^2 / 4) \cdot l = 2R(H - R)l.$$

Вертикальная составляющая силы избыточного давления воды слева:

$$F_{\text{В}_{\text{лев}}} = 2R\rho g(H - R)l.$$



## Задача 6.



Аналогично вертикальная составляющая силы избыточного давления справа:  $F_{V_{\text{прав}}} = 2R\rho g(h - R)l$ .

Вертикальная составляющая результирующей силы давления:

$$F_V = F_{V_{\text{лев}}} - F_{V_{\text{прав}}} = \\ = 2R \cdot l \rho g (H - h) = 2 \cdot 1 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 9,8(5 - 3) = 117,6 \text{ кН.}$$

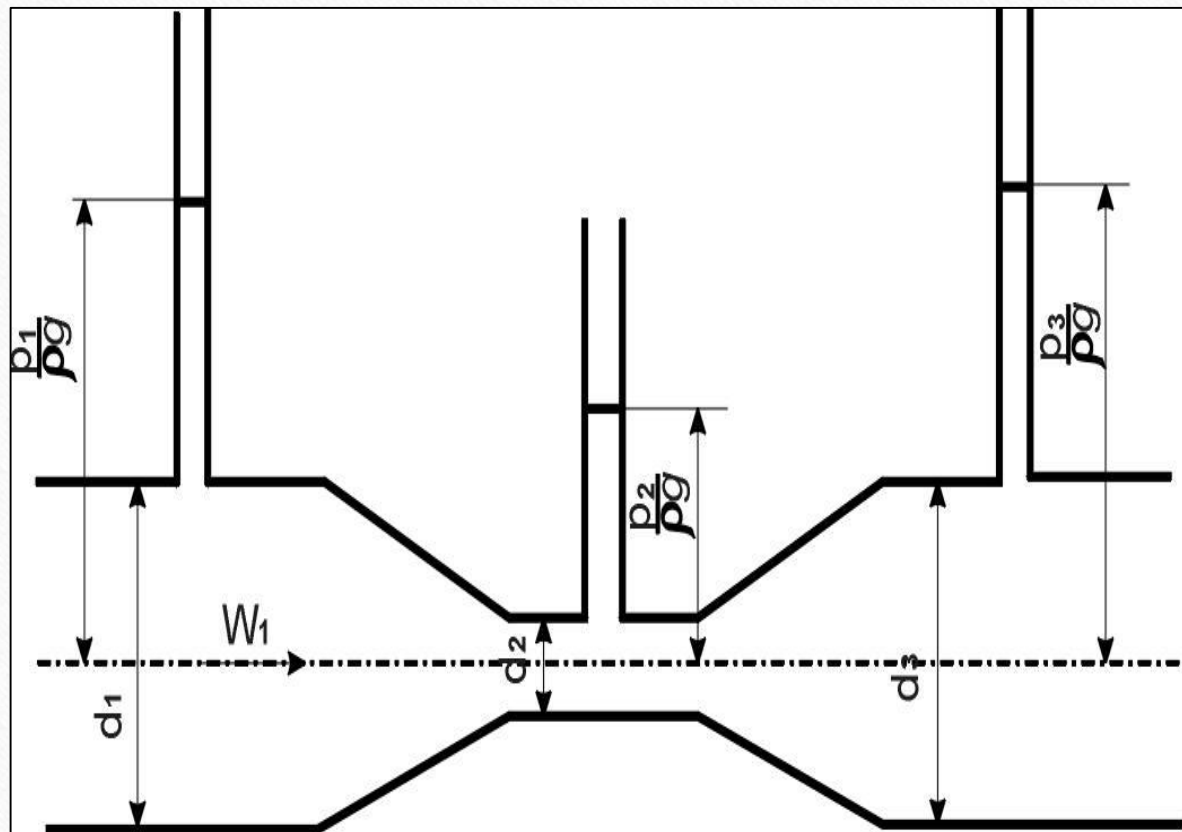
Результирующая сила давления на криволинейную стенку:

$$F_{\text{рез}} = \sqrt{117,6^2 + 117,6^2} = 166,3 \text{ кН.}$$

## Задача 7.

По горизонтальной трубе переменного сечения протекает жидкость плотностью  $\rho = 950 \text{ кг/м}^3$  и расходом  $Q = 10 \text{ л/с}$ .

Определить пьезометрические высоты в сечениях, если  $d_1 = d_3 = 100 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 25 \text{ мм}$ ,  $p_1 = 0,3 \text{ МПа}$ . Потерями пренебречь.



$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

## Задача 7.

*Решение:* пьезометрические высоты в сечениях с диаметрами  $d_1$  и  $d_3$  будут:

$$h_{p1} = h_{p3} = \frac{p_1 - p_{\text{атм}}}{\rho g} = \frac{3 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,8} = 21,5 \text{ м}$$

Для определения пьезометрической высоты в сечении диаметром  $d_2$  напишем уравнение Бернулли для первого и второго сечений:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2.$$



## Задача 7.

Здесь  $z_1 = z_2$ , так как труба горизонтальна. Найдём скорости:

$$w_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}; \quad w_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}.$$

Тогда искомая пьезометрическая высота во втором сечении будет

$$h_2 = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{w_2^2}{2g};$$

$$h_2 = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_1^4} - \frac{8Q^2}{g\pi^2 d_2^4} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) + \frac{p_1}{\rho g};$$

$$h_2 = \frac{8(10 \cdot 10^{-3})^2}{9,81 \cdot 3,14^2} \left( \frac{1}{0,1^4} - \frac{1}{0,025^4} \right) + 21,5 = 0,62 \text{ м.}$$

## Задача 8.

Определить гидравлические потери гидравлически гладкого водопровода диаметром  $d = 200$  мм и длиной  $l = 100$  м. Водопровод снабжен приемным клапаном с сеткой и имеет 2 колена. Коэффициенты местных сопротивлений  $\xi_{\text{кл}} = 8$ ,  $\xi_{\text{кол}} = 0,25$ .

Расчётный объёмный расход воды  $Q = 300$  м<sup>3</sup>/ч. Кинематический коэффициент вязкости  $\nu = 1$  мм<sup>2</sup>/с.

## Задача 8.

**Решение:** определим среднюю скорость движения воды в трубе

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 300}{3600 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2} = 2,65 \text{ м/с.}$$

Оценим режим движения жидкости  $Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{2,65 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 5,3 \cdot 10^5.$

Поскольку  $Re > 2300$ , режим движения турбулентный.

Для определения коэффициента трения гидравлически гладких труб используем формулу Блазиуса:

$$\lambda_T = 0,316 Re^{-0,25} = 0,316 \cdot (5,3 \cdot 10^5)^{-0,25} = 0,012.$$



## Задача 8.

**Решение:** Гидравлические потери на длине  $l$  найдём по формуле Дарси:

$$\Delta h_l = \lambda_T \frac{l}{d} \frac{w_{\text{cp}}^2}{2g} = 0,012 \frac{100 \cdot 2,65^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 9,8} = 2,15 \text{ м.в.ст.}$$

Гидравлические потери на местных препятствиях определим по формуле Вейсбаха:

$$\Delta h_m = (\xi_{\text{кЛ}} + 2\xi_{\text{кол}}) \frac{w_{\text{cp}}^2}{2g} = (8 + 0,5) \frac{2,65^2}{2 \cdot 9,8} = 3,05 \text{ м.в.ст.}$$

Общие гидравлические потери в трубопроводе (снижение пьезометрической высоты):

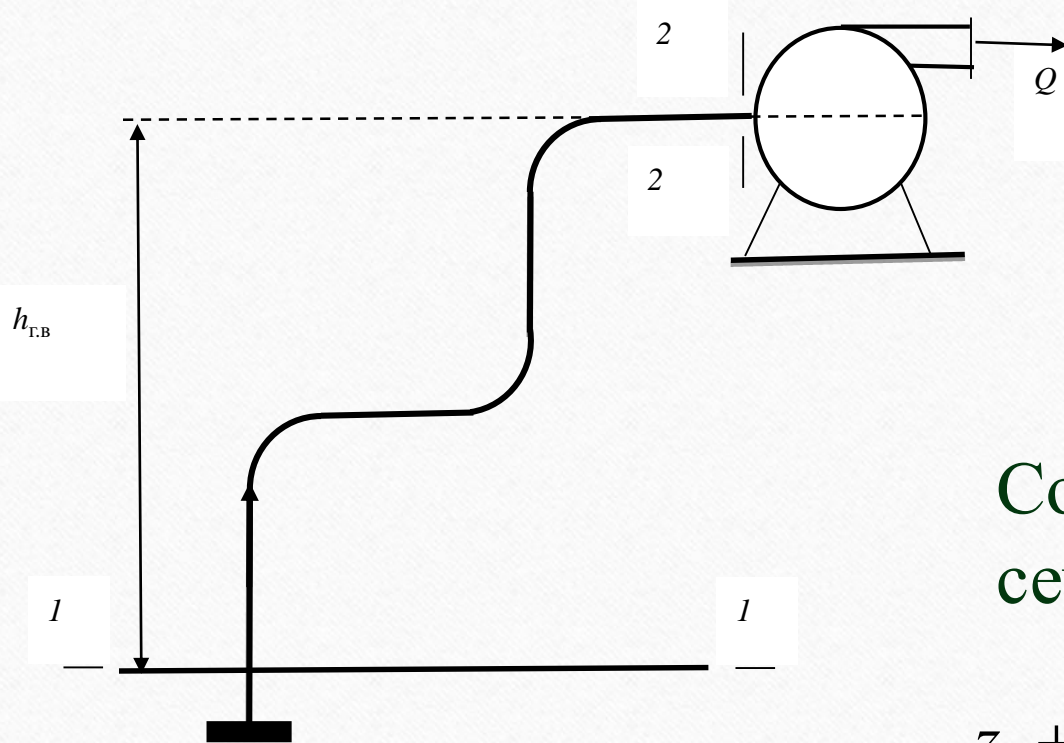
$$\Delta h_{\Sigma} = 2,15 + 3,05 = 5,2 \text{ м.в.ст.}$$

## Задача 9.

Центробежный насос с объёмной производительностью  $Q = 60$  л/с берет воду из открытой емкости и подаёт по водопроводу диаметром  $d = 25$  см и длиной 12 м. Коэффициенты потерь напора в приемном клапане с сеткой  $\xi = 8$ ; в коленах  $\xi = 0,25$ . Определить максимальную высоту установки насоса (положения оси насоса) по отношению к уровню свободной поверхности воды ( $I-I$ ), то есть реальную геометрическую высоту всасывания насоса ( $h_{г.в}$ ) в заданной гидравлической схеме, если номинальная высота всасывания (допускаемое вакуумирование) насоса составляет  $h_{вак} = 6$  м, стенки трубопровода считать гидравлически гладкими.



## Задача 9.



## *Решение*

Определим среднюю скорость движения воды в трубе:

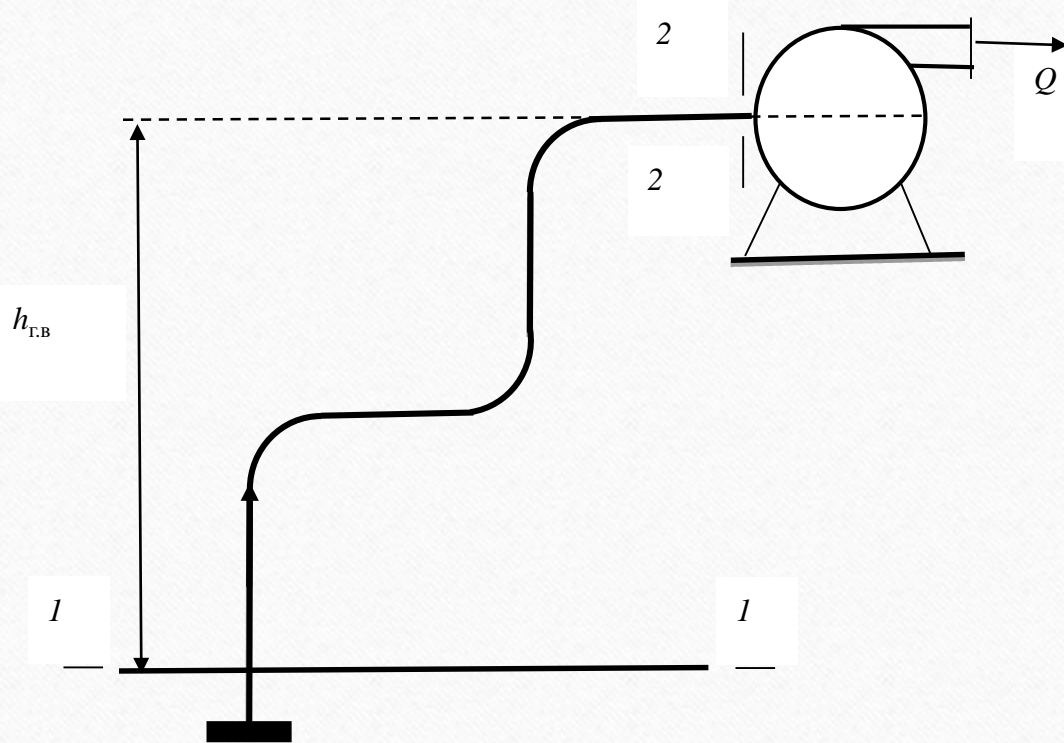
$$w = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,06}{3,14 \cdot 0,25^2} = 1,22 \text{ м/с.}$$

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha w_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2},$$



## Задача 9.



Минимальное допустимое  
абсолютное давление в сечении

$$2-2: p_2 = p_{\text{атм}} - \rho g h_{\text{вак}}.$$

Считая, что  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = w$ ,  $p_1 = p_{\text{атм}}$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = h_{\text{Г.В}}$ ,

из уравнения Бернулли  
получим:

$$h_{\text{Г.В}} = \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} - \frac{p_{\text{атм}} - \rho g h_{\text{вак}}}{\rho g} - \frac{\alpha w_2^2}{2g} - \Delta h_{1-2},$$

$$h_{\text{Г.В}} = h_{\text{вак}} - \frac{\alpha w_2^2}{2g} - \Delta h_{1-2},$$

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{1,22^2}{2 \cdot 9,8} = 0,076 \text{ м.}$$

## Задача 9.

Определим режим движения:  $Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{1,22 \cdot 0,25}{10^{-6}} = 3,05 \cdot 10^5$ .

Поскольку  $Re > 10^4$ , режим движения турбулентный, поэтому используем формулу Блазиуса:

$$\lambda_T = 0,316 Re^{-0,25} = 0,316 \cdot (3,05 \cdot 10^5)^{-0,25} = 0,013.$$

$$\Delta h_{1-2} = \frac{w^2}{2g} \cdot \left( \xi_{\text{кЛ}} + 3\xi_{\text{к}} + \frac{\lambda \cdot l}{d} \right) = \frac{1,22^2}{2 \cdot 9,8} \cdot \left( 8 + 0,75 + \frac{0,013 \cdot 12}{0,25} \right) = 0,71 \text{ м.}$$

Действительная геометрическая высота всасывания:

$$h_{\text{г.в}} = 6 - 0,076 - 0,71 = 5,214 \text{ м.}$$



Иллюстративный материал, представленный на слайдах № 24, 25, 27, 56, 99128, 129, 177, 186, 187, 190, 202, 203, 229, 231, 235, 237, 244, 247, 248, 249, 251, 253, 254, 257, 259, 260-262, 273, 274, 279 заимствован из **общедоступных ресурсов интернета**, не содержащих указаний на авторов этих материалов и каких-либо ограничений для их заимствования.