Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С.О. МАКАРОВА»

М.Ю.Ястребов

МАТЕМАТИКА

ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2014**

УДК
ББК

Рецензент: к. ф.-м.н., доцент Кузнецов В.О.

Редактор: к.т.н., доцент Пижурина Н.Ф.

Ястребов М.Ю. Производная и исследование функций.- СПб:СПГУВК, 2003 - 41 с.

Предназначено для студентов первого курса всех специальностей.

Содержание соответствует рабочей программе для первого семетра дисциплины «Математика» и может быть использовано как при подготовке к экзамену, так и для текущих учебных занятий. Учебное пособие преемственно продолжает конспект лекций В.О.Кузнецова «Теория пределов».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций.

УДК
ББК

ГЛАВА 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1.1. *Понятие производной*

Приращения

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале (a,b), и x_0 — фиксированная точка этого интервала. Если $x \in (a,b)$, то разность

$$\Delta x = x - x_0$$

называется *приращением аргумента x* в точке x_0 (рис. 1).

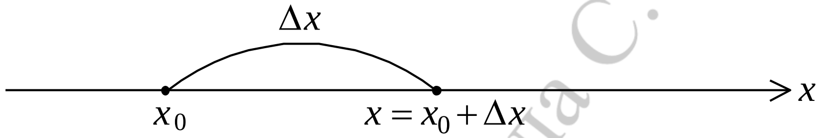

Рис. 1.

Разность соответствующих значений функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется *приращением функции* в точке x_0 (рис.2).

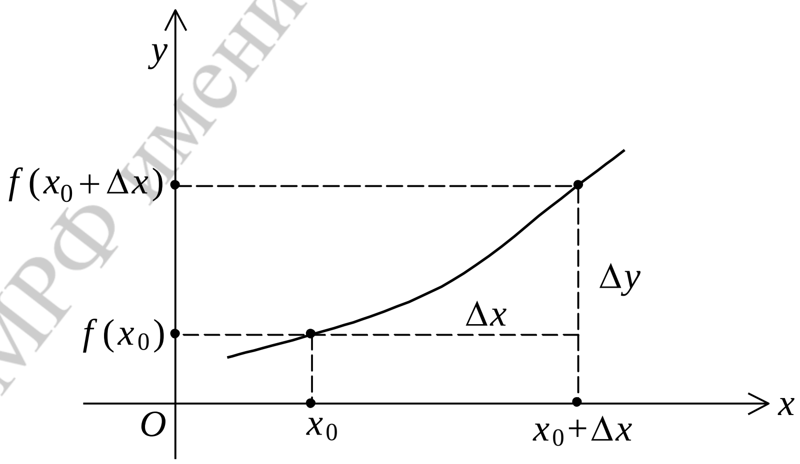

Рис. 2.

Если точка x_0 фиксирована, то Δy является функцией аргумента Δx, определенной для всех достаточно малых по модулю Δx (не выводящих за пределы интервала (a,b)).

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ также является функцией аргумента Δx, определенной в проколотой окрестности нуля (то есть для всех достаточно малых по модулю $\Delta x \neq 0$).

Отметим равносильность условий $x \to x_0$ и $\Delta x \to 0$. Поясним это подробнее. Пусть точка x_0 фиксирована. Если исходить из независимой переменной x, то $\Delta x = x - x_0$ есть функция аргумента x, и при этом $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta x(x) = 0$. Обратно, если считать Δx независимой переменной, то $x = x_0 + \Delta x$ есть функция аргумента Δx, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} x(\Delta x) = x_0$.

Определение производной

Определение. *Производной функции* f *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в точке x_0 к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что последнее стремится к нулю.

Обозначения: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$.

Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Учитывая равносильность условий $x \to x_0$ и $\Delta x \to 0$, можно записать также

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Замечание. Производная, как предел некоторой функции в некоторой точке, может и не существовать.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если в этой точке существует производная $f'(x_0)$.

Определение. Функция называется *дифференцируемой на интервале*, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

В этом случае функция $f'(x)$ называется *производной функцией*.

Операция нахождения производной f' функции f называется *дифференцированием* функции f.

Односторонние производные

С производной, как с (двусторонним) пределом отношения приращений, связаны ([1], п. 3.5) соответствующие односторонние пределы, которые называются односторонними производными функции f в рассматриваемой точке x_0:

левосторонняя производная: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

правосторонняя производная: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из теоремы о связи двустороннего предела с односторонними вытекает, что функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют и равны односторонние производные в этой точке:

$$\exists\ f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow .$$

$$\exists\ f'_-(x_0),\ \exists f'_+(x_0),\ \text{и}\ f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Физический смысл производной

Пусть функция $s(t)$ выражает длину пути, пройденного материальной точкой за время t. Тогда ее приращение $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$ — длина пути, пройденного за время от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$. Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость на этом временном промежутке. Наконец, предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V$$

выражает мгновенную скорость в момент t_0.

Вывод: Производная функции, выражающей зависимость пройденного пути от времени, является мгновенной скоростью движения.

1.2. *Геометрический смысл производной*

Рассмотрим для фиксированной точки x_0 и приращения Δx две точки $A(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ графика функции f (рис. 3).

Прямая AM — секущая графика. В треугольнике AMK тангенс угла φ наклона секущей к оси абсцисс равен отношению приращений

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MK}{AK} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и, значит, является функцией аргумента Δx.

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi_0$$

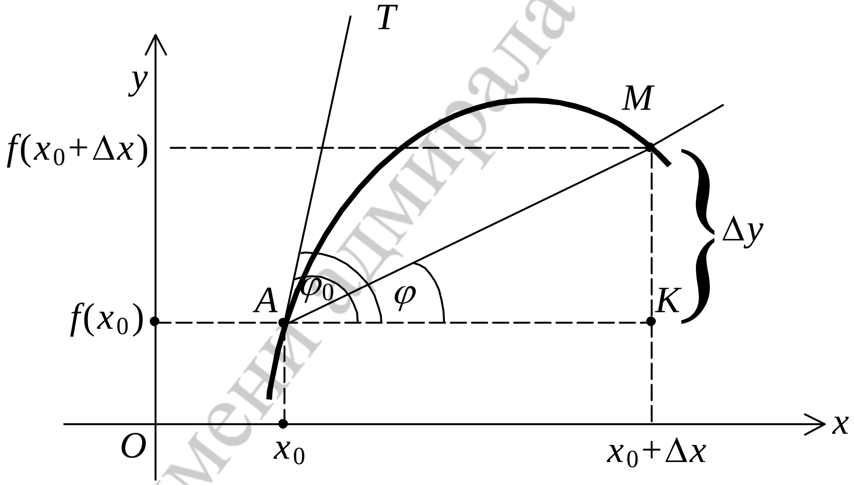

Рис. 3.

где φ_0 — некоторый угол (определяемый «предельным положением секущей», когда точка M, двигаясь по графику, неограниченно приближается к точке A).

Определение. Прямая AT, проходящая через точку A и имеющая угловой коэффициент, равный $f\,'(x_0)$, называется *касательной* к графику в точке A.

Замечание. С точки зрения геометрической интуиции касательная — это предельное положение секущей AM при неограниченном приближении точки M (которая может располагаться — в зависимости от знака Δx — с любой стороны от точки A) к точке A.

Итак, *производная равна угловому коэффициенту касательной*.

Если рассматривать предельное положение секущей AM, когда точка M, приближаясь к точке A, остается с одной стороны от нее, то мы приходим к понятию *односторонней* касательной — *левосторонней* или *правосторонней* соответственно (рис. 4).

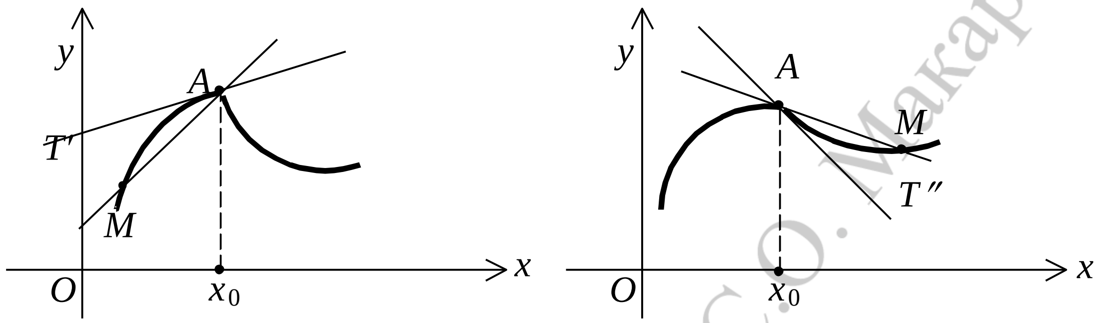

Рис. 4.

Угловые коэффициенты односторонних касательных по определению являются соответствующими односторонними производными:

для левосторонней касательной: $k_{AT'} = f'_{-}(x_0)$;

для правосторонней касательной: $k_{AT''} = f'_{+}(x_0)$.

Геометрически дифференцируемость функции f в точке A означает, что односторонние касательные AT' и AT'' совпадают, и, таким образом, существует двусторонняя касательная.

Уравнение касательной.

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и имеющей угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В соответствии с этим уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^2$.

Пусть $x_0 = 3$; $y(x_0) = 9$. Найдем производную в точке $x_0 = 3$ непосредственно на основании определения:

$$y'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot 3\cdot \Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6.$$

Итак, $x_0=3,\ f(x_0)\ =9$

Уравнение касательной в точке (3, 9):

$$y-9=6(x-3).$$

Уравнение касательной при $x=-2$:

$$y-4=-4(x+2).$$

1.3. *Критерий дифференцируемости в терминах приращений*

Теорема. Для того, чтобы функция f имела в точке x_0 производную, равную A, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy в этой точке можно было представить в виде

$$\Delta y = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (1)$$

где функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой величиной при $\Delta x\to 0$.

Доказательство. По теореме о структуре сходящейся переменной ([1], п 3.2)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(x),\ \alpha(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0.$$

Умножая обе части последнего равенства на Δx, приходим к формуле (1). ■

Замечание. При распространении понятия дифференцируемости на случай функции двух и более аргументов в основу определения кладется не предел отношения приращений, а возможность представления приращения функции в виде, аналогичном формуле (1).

1.4. *Связь непрерывности и дифференцируемости*

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда по теореме о пределе произведения

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'(x_0)\cdot 0=0,$$

и остается применить критерий непрерывности в терминах приращений ([1], п. 4.1). ■

Заметим, что обратное утверждение не имеет места: из непрерывности функции в какой-либо точке не следует ее дифференцируемость в этой точке. Геометрически: из того, что график функции в какой-либо точке не имеет скачков, разрывов, не вытекает существование двусторонней касательной. Например, график функции $y=|x|$ имеет в точке $x=0$ «острие», так что односторонние касательные к графику в точке (0;0), совпадая с соответствующими ветвями графика, перпендикулярны друг другу, и общего положения двусторонней касательной не существует (рис. 5).

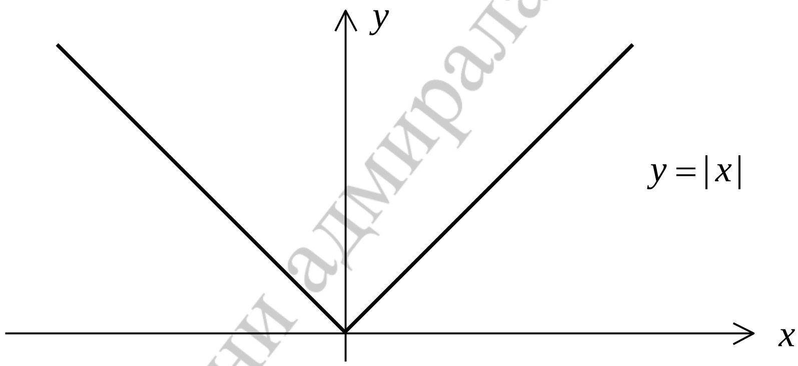

Рис. 5.

1.5. *Правила дифференцирования*.

I. Производная постоянной величины.

Пусть $f(x)=C=\text{const}$. Тогда $\forall\Delta x$:

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=C-C=0,\ f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

Итак, производная постоянной величины равна нулю: $(C)'=0$.

II. Производная суммы функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $h(x)=u(x)+v(x)$ также дифференцируема в точке x_0, и при этом $h'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$.

Доказательство. Пусть Δx — приращение аргумента. Ему соответствуют приращения функций Δu, Δv, Δh, так что

$$u(x)=u(x_0)+\Delta u;\ v(x)=v(x_0)+\Delta v;$$

$$\Delta h=h(x)-h(x_0)=(u(x)+v(x))-(u(x_0)+v(x_0))=$$

$$=[(u(x_0)+\Delta u)+(v(x_0)+\Delta v)] — (u(x_0)+v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$

Применяя арифметические свойства предела, получаем:

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x_0)+v'(x_0)\,.\ \blacksquare$$

III. Производная произведения функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $h(x)=u(x)\cdot v(x)$ также дифференцируема в точке x_0, и при этом $h'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$.

Доказательство. Пусть Δx — приращение аргумента, Δu, Δv — соответствующие приращения функций u и v. Тогда

$$\Delta h=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=$$

$$v(x_0)\Delta u+u(x_0)\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Применяя арифметические свойства предела, получаем:

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=$$

$$=v(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=$$

$$=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)+u'(x_0)\cdot v'(x_0)\cdot 0=$$

$$=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0).\ \blacksquare$$

Следствие 1. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а C — постоянное число, то функция $C\cdot u(x)$ также дифференцируема в точке x_0, и при этом $(Cu)'(x_0)=C\cdot u'(x_0)$, то есть *постоянный множитель можно выносить за знак производной*.

Доказательство. Применим правило дифференцирования произведения к постоянной функции C и к функции $u(x)$. Учитывая, что производная постоянной величины равна нулю, получим:

$$(Cu)'(x_0)=(C)'\cdot u(x_0)+C\cdot u'(x_0)=C\cdot u'(x_0). \blacksquare$$

Следствие 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $h(x)=u(x)-v(x)$ также дифференцируема в точке x_0, и при этом $h'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0)$.

Доказательство. $u(x)-v(x)=u(x)+(-1)\cdot v(x)\Rightarrow$

$(u(x)-v(x))'(x_0)=u'(x_0)+(-1)\cdot v'(x_0)=u'(x_0)-v'(x_0)$. $\blacksquare$

VI. Производная частного функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, и $v(x_0)\neq 0$. Тогда функция $h(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ также дифференцируема в точке x_0, и при этом

$$h'(x_0)=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}.$$

Доказательство. Из дифференцируемости функции v в точке x_0 следует ее непрерывность в этой точке (п. 1.4), так что при всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется условие $v(x)\neq 0$ ([1], п. 3.2), и определено частное $\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Пусть Δx — приращение аргумента, Δu, Δv — соответствующие приращения функций u и v. Тогда

$$\Delta h=\frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{v(x_0)\Delta u-u(x_0)\Delta v}{\left[v(x_0)\right]^2+v(x_0)\Delta v};$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0)-\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2+v(x_0)\Delta v}.$$

Поскольку из дифференцируемости функции следует ее непрерывность (п. 1.4), то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ ([1], п. 4.1). По свойствам предела:

$$h'(x_0) = \frac{v(x_0) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\left[v(x_0)\right]^2 + v(x_0) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} =$$

$$= \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}. \ \blacksquare$$

Арифметические свойства производной схематично записывают в виде:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(Cu)' = C \cdot u'; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

1.6. *Производная обратной функции*

Теорема. Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на интервале (a,b). Пусть, далее, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 = f(x_0)$, f дифференцируема в точке x_0, и $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда обратная функция $\varphi = f^{-1}$ дифференцируема в точке y_0 и при этом

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Существование и непрерывность обратной функции φ гарантируется строгой монотонностью и непрерывностью функции f. Если x — отличная от x_0 точка интервала (a,b), то $f(x) - f(x_0) \neq 0$, и из дифференцируемости функции f вытекает, что существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

В силу непрерывности обратной функции φ (п. 4.5)

$$\lim_{y \to y_0} x = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = x_0.$$

По теореме о пределе композиции имеем

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

то есть $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. ■

Замечание. Правило дифференцирования обратной функции записывают в виде: $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$.

1.7. *Производные основных элементарных функций*

При выводе формул дифференцирования основных элементарных функций решающую роль играют их непрерывность и замечательные пределы анализа ([1], п. 4.4).

1. Производная степенной функции. Пусть $y=x^{\mu}$, $x>0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\mu-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}=\mu x^{\mu-1}.$$

Итак, $\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$.

В частности, при $\mu=-1$: $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$;

при $\mu=\dfrac{1}{2}$: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Производная показательной функции. Пусть $y=a^{x}$, $x\in R$, $a>0$, $a\neq 1$. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=a^{x}\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$$

Итак, $(a^x)'=a^x\ln a$.

В частности, при $a=e$ получаем: $(e^x)'=e^x$.

3. Производная логарифмической функции. Пусть $y=\log_a x,\ x>0,\ a>0,\ a\neq 1$. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{\log_a\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Итак, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.

В частности, для натурального логарифма (при $a=e$) получаем: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

4. Производные синуса и косинуса. Пусть $y=\sin x,\ x\in R$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x$$

(в силу непрерывности косинуса $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$).

Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично предыдущему устанавливаем: $(\cos x)' = -\sin x$.

6. Производные тангенса и котангенса. Применим правило дифференцирования частного к функции $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$:

$$y = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Аналогично для функции $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$, устанавливаем: $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. Производные арксинуса и арккосинуса. Пусть $y = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$, $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Обратной к ней является дифференцируемая функция $x = \sin y$. По теореме о производной обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(квадратный корень берется арифметическим, поскольку $\cos y > 0$ при $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$). Итак, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогично, для функции $y = \arccos x$, $x \in (-1,1)$, $y \in (0,\pi)$, устанавливаем:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Производные арктангенса и арккотангенса. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty,\infty)$, $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Обратной к ней является дифференцируемая функция $x = \operatorname{tg} y$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^{-1} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Аналогично, для функции $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, устанавливаем:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

1.8. *Производная сложной функции*

Пусть функция $t = \varphi(x)$ задана на интервале (a, b), и множество ее значений содержится в интервале (c, d). Пусть, далее, функция $y = f(t)$ задана на интервале (c, d), так что на исходном интервале (a, b) задана сложная функция $y = h(x) = f(\varphi(x))$.

Теорема. Если функция φ дифференцируема в точке x_0, функция f дифференцируема в точке $t_0 = \varphi(x_0)$, то их композиция h дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\Delta x \neq 0$ — приращение аргумента x в точке x_0, ему соответствуют приращения Δt и Δy функций φ и f. Поскольку дифференцируемая функция непрерывна, то $\Delta t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Заметим, что Δt может принимать и нулевые значения, поскольку функция t не обязана быть строго монотонной.

Критерий дифференцируемости в терминах приращений (п. 1.3) позволяет представить Δy в виде

$$\Delta y = f'(t_0) \cdot \Delta t + \alpha(\Delta t) \cdot \Delta t, \qquad (*)$$

где бесконечно малая функция $\alpha(\Delta t)$ определена при $\Delta t \neq 0$. Поэтому сложная функция $\alpha(\Delta t(\Delta x))$ определена лишь для тех Δx, при которых $\Delta t \neq 0$. Положим дополнительно $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta t(\Delta x))$ определена и при тех допустимых приращениях Δx, при которых соответствующее $\Delta t = 0$, и при этом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta t(\Delta x)) = 0$.

Тогда равенство (*) можно рассматривать как равенство функций аргумента Δx, справедливое при всех достаточно малых $\Delta x \neq 0$. Поделив обе части на Δx , получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(t_0) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha(\Delta t(\Delta x)) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Теперь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(t_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta t(\Delta x)) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

так что $h'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) + 0 \cdot \varphi'(x_0)$. ■

Замечание. Правило дифференцирования сложной функции схематично записывают в виде $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ или $y'(x) = y'(t) \cdot t'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$.

Пример. Функцию $y = \cos^2 x$ можно рассматривать как композицию функций $t = \cos x$ и $y = t^2$. Применяя формулы для производных основных элементарных функций, получаем

$$y'(x) = (t^2)'_t \cdot (\cos x)'_x = 2t \cdot (-\sin x) = 2\cos x \cdot (-\sin x).$$

1.9. *Дифференцирование параметрически заданных функций*

Пусть на интервале (a, b) заданы функции

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \tag{1}$$

причем φ строго монотонна, так что существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда y является сложной функцией аргумента x с промежуточной переменной (параметром) t:

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = y(x). \tag{2}$$

Определение. Функция $y(x)$ называется *параметрически заданной* с помощью зависимостей (1).

Пусть $t_0 \in (a, b)$, $x_0 = \varphi(t_0)$, и функции φ, ψ дифференцируемы в точке t_0, причем $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда дифференцируемой в точке x_0 оказывается обратная функция φ^{-1} (п. 1.6), а вместе с нею и сложная функция $y(x)$ (п. 5.8).

Найдем выражение для производной $y'(x_0)$, используя зависимости (1), без использования явной записи сложной функции (2).

$$y'(x_0) = \psi\ '(t_0) \cdot (\varphi^{-1})'(x_0) = \psi\ '(t_0) \cdot \frac{1}{\varphi'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x_0) = \dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$; или в схематической записи $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример. $x = t^3 + 4t;\ y = \sin t;\ t_0 = 0;$

$x'(t) = 3t^2 + 4;\ x'(0) = 4;$

$y'(t) = \cos t;\ y'(0) = 1;$

$y'_x\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{4}.$

1.10. *Дифференциал*

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$, и f дифференцируема в точке x_0. Пусть, далее, Δx — приращение аргумента, так что $x = x_0 + \Delta x$.

Определение. *Дифференциалом* dy функции f в точке x_0 называется линейная функция аргумента Δx вида $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, определенная для всех $\Delta x \in R$.

Пример. Пусть $y = x^3 - x$, $x_0 = 2$. Тогда $y'(x) = 3x^2 - 1$; $y'(2) = 11$; $dy = 11 \cdot \Delta x$. Дифференциал этой же функции в точке $x_0 = 1$ имеет вид $dy = 2 \cdot \Delta x$, поскольку $y'(1) = 2$.

Таким образом, линейная функция — дифференциал dy «сопровождает» дифференцируемую функцию y в каждой точке области определения, меняя коэффициент пропорциональности в соответствии со значением производной.

Замечание. Дифференциал dy, как функция аргумента Δx, является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой величиной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} dy = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Точно так же бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$ является приращение Δy (в силу непрерывности дифференцируемой функции).

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда дифференциал dy и приращение Δy, как функции аргумента Δx, являются при $\Delta x \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми величинами.

Доказательство. По формуле для приращения дифференцируемой функции (п. 1.3):

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Убедимся в соответствии с критерием эквивалентности ([1], п. 3.6), что разность

$$\gamma(\Delta x) = \Delta y - dy = (f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x - f'(x_0) \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

является бесконечно малой более высокого порядка, чем dy. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Замечание. Эквивалентность приращения и дифференциала позволяет в приближенных вычислениях считать их примерно равными и заменять Δy на dy (в случаях, когда это упрощает вычисления).

Пример. Сравним дифференциал и приращение функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$ для различных значений Δx. Имеем: $y' = 3x^2$;

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1^3 = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$dy = y'(1) \cdot \Delta x = 3\Delta x.$$

При $\Delta x = 0.5$: $dy = 1.5$; $\Delta y = 2.375$;
при $\Delta x = 0.1$: $dy = 0.300...$; $\Delta y = 0.331...$;
при $\Delta x = 0.01$: $dy = 0.03000...$; $\Delta y = 0.0303...$.

1.11. *Геометрический смысл дифференциала*

Рассмотрим чертеж на рис. 6.

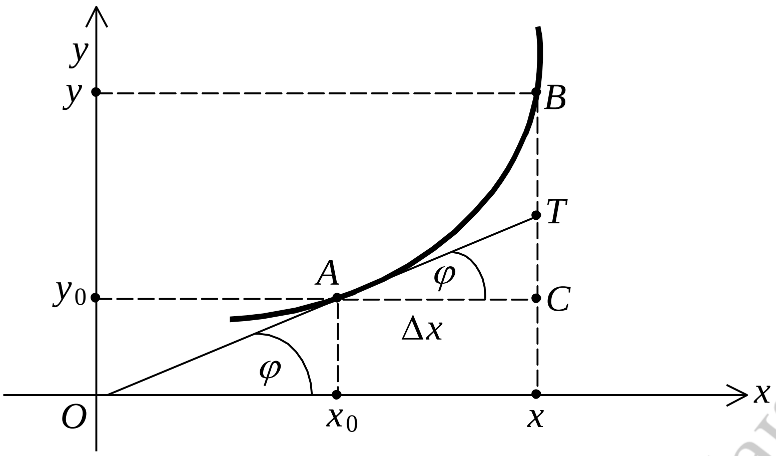

Рис. 6.

Имеем: $\Delta y = BC$; $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x = \mathrm{tg}\,\varphi\cdot AC = TC$.

Таким образом, дифференциал dy показывает приращение ординаты <u>точки касательной</u> при переходе аргумента от x_0 к $x_0 + \Delta x$.

В свою очередь, приращение Δy показывает приращение ординаты <u>точки графика</u> при таком же изменении аргумента.

Наконец, разность $\Delta y - dy$, являющаяся бесконечно малой более высокого порядка, чем Δy и dy, изображается отрезком BT, который, стягивается при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем отрезки BC и TC.

1.12. *Производные и дифференциалы высших порядков*

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b). Ее производная $f'(x)$ в свою очередь может оказаться дифференцируемой на (a,b) или на более узком интервале функцией.

Определение. Производная $(f'(x))'$ функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка*, или *второй производной*, исходной функции $y = f(x)$.

Обозначения: $y''(x)$, $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y^{II}, $y^{(2)}(x)$.

Аналогично определяются производные более высоких порядков:

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'. \tag{1}$$

Замечание. Для единства формулировок принято считать исходную функцию производной нулевого порядка; тогда формула (1) справедлива и при $n=1$.

Примеры. 1. $y=5x^3-3x^2+6x-17$; $y'=15x^2-6x+6$; $y''=30x-6$; $y^{(3)}=30$; $y^{(4)}=y^{(5)}=\ldots=0$.

2. $y=e^{3x}$; $y'=3e^{3x}$; $y''=3^2e^{3x}$;…; $y^{(n)}=3^ne^{3x}$.

3. $y=\cos x$; $y'=-\sin x$; $y''=-\cos x$; $y^{(3)}=\sin x$; $y^{(4)}=\cos x$;...

4. $y=e^x$; $y'=y''=\ldots=y^{(n)}=e^x$.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную n-го порядка: $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Определение. *Дифференциалом n-го порядка* функции f в точке x_0 называется степенная функция аргумента Δx вида:

$$d^ny=f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n.$$

1.13. *Основные теоремы о дифференцируемых функциях*

1. Необходимое условие экстремума.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $\langle a,b\rangle$. Внутренняя точка c этого промежутка называется *точкой экстремума* (*максимума или минимума*), если существует окрестность U этой точки такая, что

$$\forall x\in U:\quad f(x)\le f(c) \text{ — в случае максимума;}$$

$$\forall x\in U:\quad f(x)\ge f(c) \text{ — в случае минимума.}$$

Замечание. Экстремум является локальной характеристикой поведения функции вблизи точки c (то есть в некоторой ее окрестности). Вне этой окрестности функция может иметь значения меньшие, чем в точке минимума, или большие, чем в точке максимума (рис. 7).

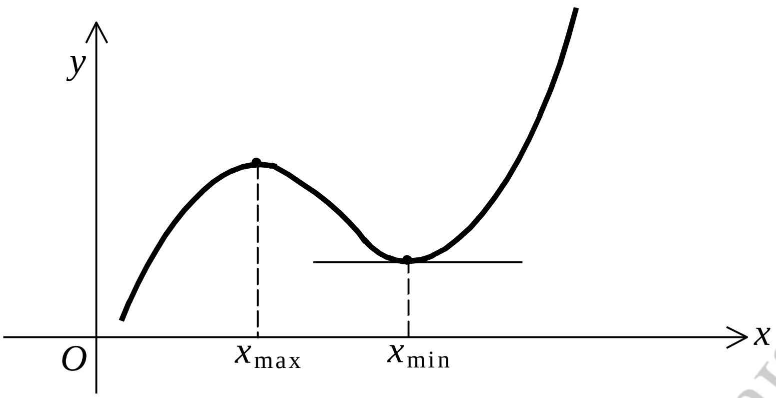

Рис. 7.

Теорема Ферма. Пусть функция f дифференцируема в точке c, и c — точка экстремума. Тогда $f'(c)=0$.

Замечание. Поскольку значение производной равно угловому коэффициенту касательной, а равенство углового коэффициента прямой нулю означает параллельность этой прямой оси абсцисс, то геометрически утверждение теоремы Ферма означает, что *в точке экстремума касательная (когда она существует) параллельна прямой Ox* (рис. 7).

Доказательство. Проведем его для случая, когда c — точка максимума.

Пусть Δx достаточно мало по модулю. По условию при любом знаке Δx выполняется неравенство:

$$\Delta f = f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \text{ при } \Delta x < 0;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \text{ при } \Delta x > 0;$$

Переходя к пределу в этих неравенствах ([1], п. 2.3) и применяя теорему о связи двустороннего предела с односторонними ([1], п. 3.5), заключаем:

$$\left.\begin{aligned} f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0; \\ f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0; \end{aligned}\right| \Rightarrow f'(c) = 0. \ \blacksquare$$

2. Теорема Ролля. Пусть функция f удовлетворяет трем условиям:

1) f непрерывна на $[a,b]$;

2) f дифференцируема на (a,b);

3) f принимает на концах отрезка равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует внутренняя точка $c \in (a,b)$, в которой производная равна нулю: $f'(c) = 0$.

Замечание. Геометрически утверждение теоремы означает, что при изменении аргумента от a к b касательная в некоторой точке становится параллельной оси абсцисс (рис. 8).

Из чертежа усматривается также, что такой точкой является любая из точек экстремума функции.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса ([1], п. 4.5) функция f, будучи непрерывной, достигает в некоторых точках отрезка наибольшего M и наименьшего m значений.

Рассмотрим два возможных случая.

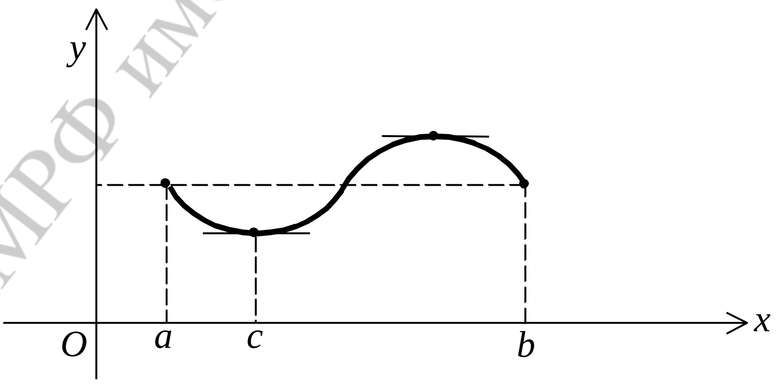

Рис. 8.

1) $M = m \Rightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in (a,b) \ f'(x) = 0$.

2) $M > m$. Поскольку значения функции на концах отрезка одинаковы, то по крайней мере одно из значений M или m достигается во внутренней точке $c \in (a,b)$, которая, таким образом, яв-

ляется точкой экстремума. Тогда для нее выполнены условия теоремы Ферма, и следовательно $f'(c)=0$. ■

Пример. Применяя теорему Ролля к многочлену $P(x)$ степени $n\geq 2$, заключаем, что между любыми двумя соседними корнями многочлена содержится по крайней мере один корень производной $P'(x)$.

3. Теорема Лагранжа о приращениях. Пусть функция f удовлетворяет двум условиям:

1) f непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) f дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда существует внутренняя точка $c\in(a,b)$, для которой

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Замечание. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно тангенсу угла наклона секущей AB к оси абсцисс (рис. 9). В свою очередь, $f'(c)$ равно тангенсу угла наклона касательной MT к оси абсцисс. Их равенство означает параллельность касательной в некоторой внутренней точке графика и секущей, стягивающей его концы.

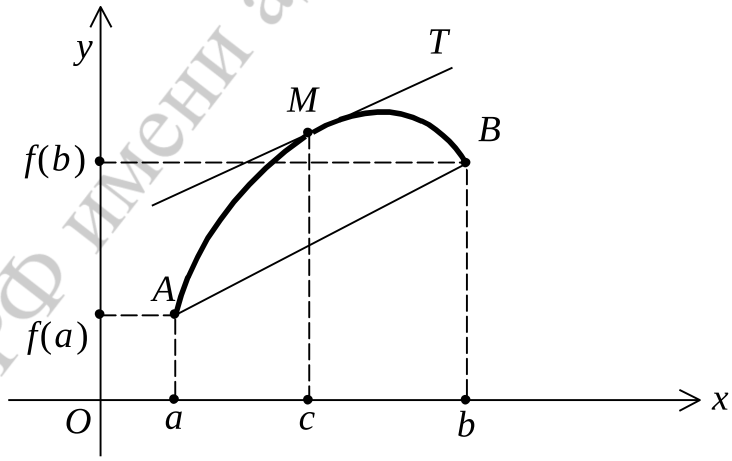

Рис. 9.

Доказательство. Оно основывается на применении теоремы Ролля к специальным образом подобранной функции.

Зададим функцию φ на отрезке $[a,b]$ в виде $\varphi(x)=f(x)-\lambda x$. Имея ввиду условие 3 теоремы Ролля, подберем коэффициент λ так, чтобы выполнялось равенство : $\varphi(b)=\varphi(a)$. Имеем

$$\varphi(b)=\varphi(a)\Leftrightarrow f(b)-\lambda b=f(a)-\lambda a\Leftrightarrow \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Функция φ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), поскольку таким свойством по условиям теоремы обладает функция f, а функция λx, будучи линейной, также непрерывна и дифференцируема. По теореме Ролля существует внутренняя точка $c\in(a,b)$ для которой:

$$\varphi'(c)=f'(c)-\lambda=0 \Rightarrow f'(c)=\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \blacksquare$$

4. Теорема Коши об отношении приращений. Пусть функции f и g удовлетворяют трем условиям:

1) f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$;

2) f и g дифференцируемы на интервале (a,b);

3) $\forall x\in(a,b)$: $g'(x)\neq 0$.

Тогда существует внутренняя точка $c\in(a,b)$, для которой

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Замечание 1. Если к разности $g(b)-g(a)$ применить теорему Лагранжа, то в силу третьего условия теоремы $g(b)-g(a)\neq 0$.

Замечание 2. Теорему Коши нельзя доказать, применяя теорему Лагранжа по отдельности к $f(b)-f(a)$ и $g(b)-g(a)$, поскольку точка c_f, относящаяся к первой разности, не обязана совпадать с точкой c_g, относящейся ко второй разности; в то же время в утверждении теоремы Коши присутствуют значения производных в одной и той же точке.

Замечание 3. Теорему Лагранжа можно получить как частный случай теоремы Коши, если положить $g(x)=x\Rightarrow g'(x)=1$.

Доказательство. Как и предыдущее, оно получается применением теоремы Ролля к функции, подходящим образом построенной из функций f и g.

Положим $\varphi(x)=f(x)-\lambda g(x)$. Выберем коэффициент λ так, чтобы $\varphi(b)=\varphi(a)$. Имеем

$$\varphi(b)=\varphi(a)\Leftrightarrow \varphi(b)-\lambda g(b)=f(a)-\lambda g(a)\Leftrightarrow \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Функция φ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, следовательно, существует точка $c\in(a,b)$, для которой $\varphi'(c)=0 \;\Rightarrow$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \blacksquare$$

5. Критерий постоянства функции.

Теорема. Пусть функция f дифференцируема на промежутке $\langle a,b\rangle$. Для того, чтобы f была постоянной величиной, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x\in\langle a,b\rangle$: $f'(x)=0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)=c \;\Rightarrow (c)'=0$.

Достаточность. Пусть $\forall x\in\langle a,b\rangle$: $f'(x)=0$. Отметим, что из дифференцируемости функции на промежутке $\langle a,b\rangle$ вытекает ее непрерывность на этом промежутке (включая концы промежутка, если они ему принадлежат). Выберем какую-либо точку $x_0\in\langle a,b\rangle$. Тогда для всякой другой точки $x\in\langle a,b\rangle$ по теореме Лагранжа

$$f(x)=f(x_0)+f'(c)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+0\cdot(x-x_0)=f(x_0)=\mathrm{const}. \blacksquare$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, определенную на $[-1,1]$. Поскольку $\forall x\in(-1,1)$ у функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ существуют производные, различающиеся лишь знаком, то на этом интервале $f'(x)=0$, и тогда $f(x)=c=\mathrm{const}$. Далее,

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, легко проверяется, что и для крайних точек отрезка $[-1,1]$:

$$f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)=\frac{\pi}{2}.$$

$$f(1)=\arcsin(1)+\arccos(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, при всех $x\in[-1,1]$ выполняется равенство

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

1.14. *Правило Лопиталя*

Теоремы, объединяемые термином ″правило Лопиталя", позволяют для пределов с неопределенностями 0/0 или ∞/∞ заменять отношение функций отношением их производных. Доказательство теорем связано с представлением функции, стоящей под знаком предела, в виде отношения приращений двух функций и с последующим применением теоремы Коши (в утверждении которой как раз фигурирует отношение производных).

Теорема 1 (*о неопределенности* 0/0 *в конечной точке*). Пусть функции f и g удовлетворяют четырем условиям:

1) f, g дифференцируемы на интервале (a,b);

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$;

4) $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$ $(-\infty \le k \le \infty)$.

Тогда

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k\,.$$

Доказательство. Положим дополнительно $f(a) = g(a) = 0$. Тогда f и g непрерывны на $[a,b)$. Выберем какую-либо точку $x \in (a,b)$. Функции f и g на отрезке $[a,x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, следовательно

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a < c < x$ (рис. 10); положение точки c зависит от x, то есть $c = c(x)$. При $x \to a+0$ имеем $c(x) \to a+0$. По теореме о предельном переходе под знаком непрерывной функции ([1], п. 4.2):

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = k\,. \ \blacksquare$$

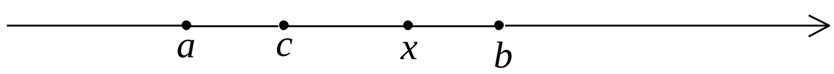

Рис. 10.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема для левостороннего предела и, тем самым ([1], п. 3.5), для двустороннего предела.

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Теорема 2 (*о неопределенности* 0/0 *на бесконечности*). Пусть функции f и g удовлетворяют четырем условиям:

1) f, g дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ при $x\in(a,+\infty)$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$, $(-\infty\le k\le\infty)$.

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Доказательство. Поскольку в теореме идет речь о поведении функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to+\infty$, можно считать, что $a>0$. Положим

$z=\dfrac{1}{x}\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{1}{z},\ \ z\in(0,a^{-1})$. При этом: $x\to+\infty\ \Leftrightarrow\ z\to 0+0$.

Функции f и g оказываются тогда сложными функциями аргумента z: $f(x)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f_1(z);\quad g(x)=g\left(\dfrac{1}{z}\right)=g_1(z);$

Проверим для f_1 и g_1 выполнение условий теоремы 1 на интервале $(0,a^{-1})$:

1) f_1 и g_1 дифференцируемы (а значит и непрерывны) на $(0,a^{-1})$ по теореме о производной сложной функции (п. 1.8);

2) по теореме о предельном переходе под знаком непрерывной функции ([1], п. 4.2)

$$\lim_{z\to 0+0} f_1(z)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;\quad \lim_{z\to 0+0} g_1(z)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0;$$

3) в силу условия 3:

$$g_1'(z)=g'(x)\cdot\left(\frac{1}{z}\right)_z'=g'(x)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\neq 0;$$

4) применяя к производным f_1' и g_1' правило дифференцирования сложной функции, а к пределу их отношения — теорему о предельном переходе под знаком непрерывной функции, получаем:

$$\lim_{z\to 0+0}\frac{f_1'(z)}{g_1'(z)}=\lim_{z\to 0+0}\frac{f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'(x)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\,.$$

Тогда по теореме 1

$$\lim_{z\to+0}\frac{f_1(z)}{g_1(z)}=k\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\,.\ \blacksquare$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sin\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\cos\frac{1}{x}}=\frac{e^0}{\cos 0}=1$$

Аналогичным образом доказываются теоремы о неопределенности ∞/∞.

Пример. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^3}$, $a>1$. Применяя трижды правило Лопиталя к неопределенности ∞/∞, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^3}{6}=+\infty\,.$$

Аналогичным образом устанавливается и в общем виде, что показательная функция возрастает быстрее степенной: при $a>1$, $\mu>0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\mu}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=+\infty$$

(дифференцирование продолжается до тех пор, пока показатель степенной функции, всякий раз уменьшаясь на единицу, не станет отрицательным).

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

2.1. *Признаки монотонности*

Теорема (*критерий монотонности*). Пусть функция f дифференцируема на промежутке $\langle a\,,b\rangle$. Тогда:

1) для того, чтобы она была монотонно возрастающей (нестрого) на $\langle a\,,b\rangle$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\forall\, x \in \langle a\,,b\rangle\colon \quad f'(x) \geq 0;$$

2) для того, чтобы она была монотонно убывающей, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\forall\, x \in \langle a\,,b\rangle\colon \quad f'(x) \leq 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть, например, f монотонно возрастает (рис. 11).

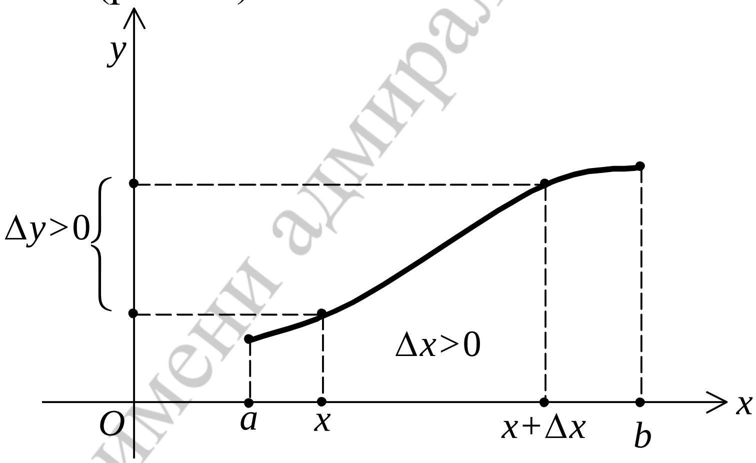

Рис. 11.

Рассмотрим случай, когда x — внутренняя точка промежутка. Пусть допустимое приращение аргумента $\Delta x > 0$. По теореме о связи двустороннего предела с односторонними ([1], п. 3.5):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В дроби, стоящей под знаком предела, числитель неотрицателен в силу монотонности, так что и вся дробь неотрицательна. Применяя теперь предельный переход в неравенстве ([1], п. 3.2), заключаем, что

$$f'(x) \geq 0.$$

Достаточность. Пусть производная сохраняет знак на промежутке $\langle a, b\rangle$, например $\forall x \in \langle a, b\rangle$: $f'(x) \geq 0$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$. Так как оба множителя в последнем произведении неотрицательны (первое — по условию, второе — по выбору точек x_1 и x_2), то $f(x_1) \leq f(x_2)$. ■

Теорема (*достаточное условие строгой монотонности*). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда:

1) если $\forall x \in (a, b)$: $f'(x) > 0$, то f строго возрастает на $[a, b]$;

2) если $\forall x \in (a, b)$: $f'(x) < 0$, то f строго убывает на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть, например, во всех точках интервала производная положительна. Выберем произвольные $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \blacksquare$$

Замечание. Условие $f'(x) \geq 0$ не является необходимым для строгого возрастания f. Например, функция $y = x^3$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$; в то же время ее производная $y = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

2.2. *Признаки экстремума*

Теорема Ферма (п. 1.13) дает необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Однако, как показывает последнее замечание, равенство производной нулю не является достаточным признаком экстремума.

Достаточное условие экстремума в терминах первой производной дает

Теорема. Пусть функция f непрерывна в окрестности U точки x_0 и дифференцируема во всех точках U за исключением, может быть, самой точки x_0. Пусть, далее, производная f' сохраняет постоянный знак с каждой стороны от x_0. Тогда:

1) если при переходе аргумента через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума;

2) если при переходе аргумента через точку x_0 производная меняет знак с «−» на «+», то x_0 — точка минимума.

3) если при переходе аргумента через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. Рассмотрим какой-либо отрезок $[c,d\,]\subset U$, содержащий точку x_0 (рис. 12).

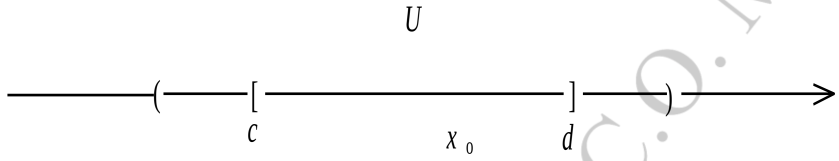

Рис. 12.

Пусть, например, знак производной меняется с «+» на «−», то есть:

$$x < x_0 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0,$$

$$x > x_0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0.$$

Для отрезка $[c,\, x_0]$ выполняется достаточное условие строгой монотонности, а именно возрастания (п. 2.1), поэтому

$$x < x_0 \;\Rightarrow\; f\,(x) < f\,(x_0).$$

Аналогично на отрезке $[\,x_0, d\,]$ функция f строго убывает, так что

$$x > x_0 \;\Rightarrow\; f\,(x) < f\,(x_0).$$

Следовательно, x_0 — точка максимума.

Докажем третье утверждение теоремы. Пусть, для определенности, $f'(x) > 0$ при $x \in [c,d\,]$, $x \neq x_0$. Тогда по теореме о достаточном условии строгой монотонности (п. 2.1) на отрезках $[c,\, x_0]$ и $[\,x_0, c]$ функция f строго возрастает. Следовательно, f возрастает на всем отрезке $[c,d\,]$, и $x_0 = 0$ не является точкой экстремума. ■

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^2$ на отрезке $[-1,1]$. Ее производная $y' = 2x$ при переходе аргумента через точку $x_0 = 0$

меняет знак с «–» на «+». Следовательно, $x_0 = 0$ — точка минимума.

Достаточное условие экстремума в терминах второй производной дает

Теорема. Пусть функция f удовлетворяет трем условиям:

1) f дифференцируема в некоторой окрестности U точки x_0 (включая саму эту точку);

2) $f'(x_0) = 0$;

3) в точке x_0 существует отличная от нуля вторая производная $f''(x_0)$.

Тогда x_0 — точка экстремума; при этом:

если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума;

если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Имеем

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 .$$

Тогда ([1], п. 3.2) дробь $\dfrac{f'(x)}{x - x_0}$ остается положительной в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Отсюда следует, что $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Итак, при переходе аргумента через точку x_0 производная меняет знак с «–» на «+». По предыдущей теореме отсюда следует, что x_0 — точка минимума. ■

Определение. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Эта точка называется *стационарной*, если в ней существует производная, равная нулю: $f'(x_0) = 0$. Точка x_0, в которой функция непрерывна, называется *критической*, если в этой точке производная равна нулю, или не существует.

Замечание. Из необходимого условия экстремума (т.е. из теоремы Ферма) следует, что точки экстремума функции на интервале нужно искать среди ее критических точек, а в случае дифференцируемости — среди стационарных точек, проверяя для них выполнение достаточных условий экстремума.

Примеры. 1. Найдем точки экстремума функции $y = e^{-x^2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. На указанном интервале функция дифференцируема. Найдем ее стационарные точки, решая уравнение

$$y' = -2x\,e^{-x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Итак, $x_0 = 0$ — единственная стационарная точка, «подозрительная на экстремум». Исследуем знак производной y' в окрестности этой точки. Имеем:

$$x < 0 \Rightarrow\; y' > 0;\; x > 0 \Rightarrow\; y' < 0.$$

Поскольку при переходе аргумента через x_0 производная меняет знак с «$+$» на «$-$», то x_0 является точкой максимума, и при этом единственной точкой экстремума функции.

2. Найдем на интервале $(-\infty, +\infty)$ точки экстремума функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

При $x < 0$: $y' = (-x)' = -1$; при $x > 0$: $y' = (x)' = 1$. В точке $x_0 = 0$ производная не существует, поскольку односторонние производные в этой точке различны: $y'_-(0) = -1$, $y'_+(0) = 1$. Итак, x_0 является единственной критической точкой (подозрительной на экстремум). Так как при переходе аргумента через x_0 производная меняет знак с «$-$» на «$+$», то x_0 является точкой минимума, и при этом единственной точкой экстремума функции.

2.3. *Крайние значения функции на отрезке*

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его точках, за исключением, может быть, конечного их числа. По теореме Вейерштрасса ([1], п. 4.5) в некоторых точках отрезка функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти точки могут оказаться как граничными, так и внутренними точками отрезка.

Если точка крайнего значения лежит внутри отрезка, то она оказывается также и точкой экстремума (максимума или минимума соответственно), а значит, и критической точкой.

Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке достаточно сравнить между собой значения функции на концах отрезка $f(a)$, $f(b)$, а также в тех критических точках, которые лежат внутри отрезка.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $J = [0,3]$.

Имеем:

$$y' = 3x^2 - 12.$$

Решая уравнение $y' = 0$, находим критические точки:

$$x_1 = -2 \notin J; \quad x_2 = 2 \in J.$$

Вычисляем: $f(0) = 7$; $f(3) = -2$; $f(2) = -9$.

Таким образом, наибольшее значение функции, равное 7, достигается в левой граничной точке отрезка $x = 0$, а наименьшее значение, равное -9, достигается во внутренней точке отрезка $x = 2$.

2.4. *Выпуклость функции*

В общем случае понятие выпуклости вводится для произвольных непрерывных функций без участия понятия производной. Здесь в целях простоты *будут рассматриваться только дифференцируемые функции*, графики которых тем самым всюду имеют двустороннюю касательную.

Определение. 1. Функция f, непрерывная на [a,b] и дифференцируемая на (a,b), называется *выпуклой вниз* на этом интервале, если ее график целиком лежит не ниже касательной, проведенной в любой точке графика (рис. 13). Соответственно *выпуклым вниз* называется и график функции. **2.** Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если ее график целиком лежит не выше касательной, проведенной в любой точке (рис. 14).

Замечание. Можно в определении выпуклости непрерывной функции опираться не на касательные к графику, а на хорды, стягивающие две его произвольные точки (в этом случае требование дифференцируемости, предполагающее существование касательной, оказывается избыточным). Так, для выпуклой вниз функции часть графика, стянутая хордой, целиком лежит не выше хорды, а для выпуклой вверх функции — не ниже (рис. 15 и 16).

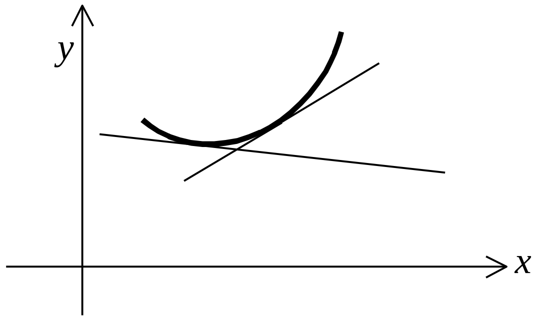

Рис. 13.

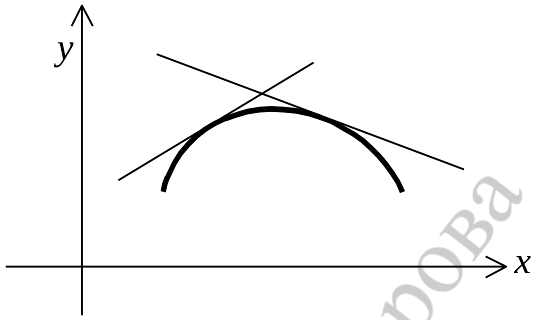

Рис. 14.

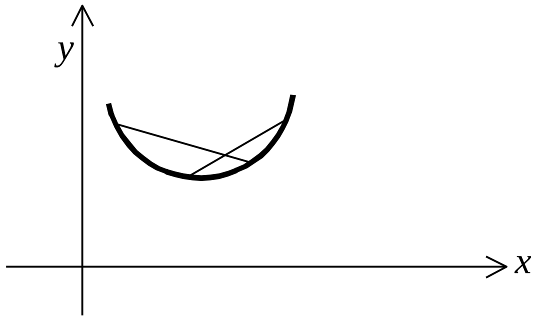

Рис. 15.

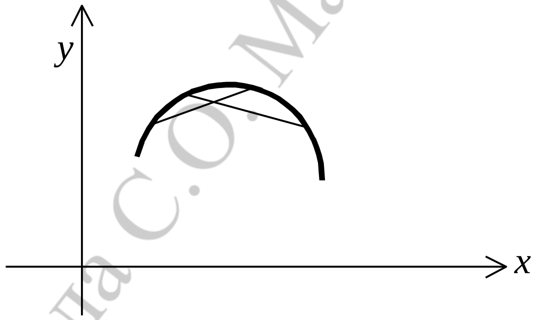

Рис. 16.

Замечание. Как усматривается из рис. 17, у выпуклой вниз функции угол наклона касательной к оси Ox, а с ним и угловой коэффициент касательной, равный значению производной, возрастают по мере увеличения аргумента. Для выпуклой вверх функции эти величины, наоборот, убывают.

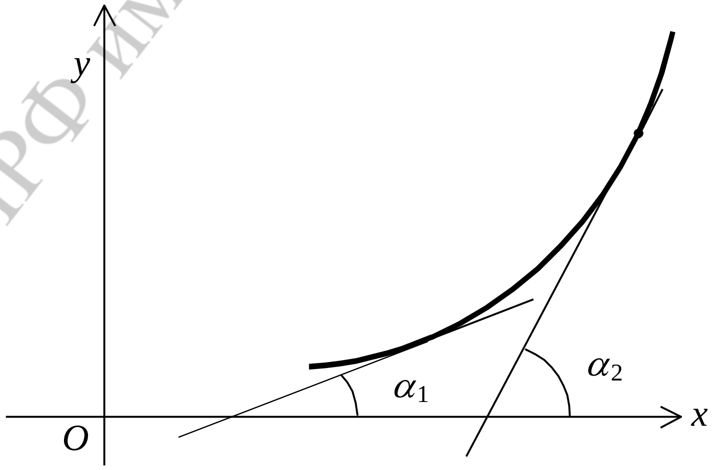

Рис. 17.

Теорема. (*достаточное условие выпуклости*). Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак на этом интервале, то функция является выпуклой. При этом:

если $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз;

если $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) \leq 0$, то функция выпукла вверх.

Доказательство. Пусть, например, $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) \geq 0$. Убедимся, что функция является выпуклой вниз. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$; $M_0(x_0; f(x_0))$ — соответствующая точка графика, прямая M_0T — касательная, проходящая через точку M_0 (рис. 18).

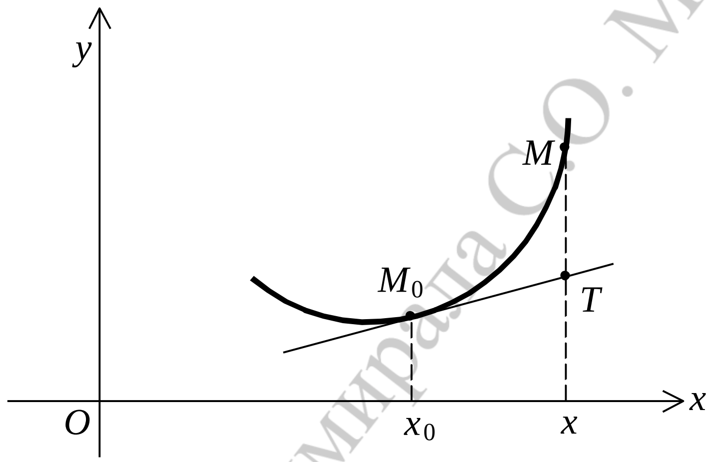

Рис. 18.

Нужно показать, что для всякого $x \in (a,b)$ точка графика $M(x; f(x))$ лежит не ниже соответствующей точки касательной T, то есть что разность ординат $y_M - y_T$ этих точек неотрицательна.

Ордината y_T в соответствии с уравнением касательной имеет значение

$$y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Поэтому

$$y_M - y_T = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применяя к разности в квадратных скобках теорему Лагранжа (п. 1.13), получаем:

$$y_M - y_T = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где c — некоторая промежуточная точка между x и x_0. Снова применяя к разности в квадратных скобках теорему Лагранжа (теперь уже для функции f'), получаем:

$$y_M - y_T = f''(\xi)(c - x_0)(x - x_0),$$

где ξ — некоторая промежуточная точка между c и x_0.

По условию $f''(\xi) \geq 0$. Далее, произведение $(c - x_0)(x - x_0)$ положительно при любом взаимном расположении точек c, x_0, x, что усматривается из рис. 19.

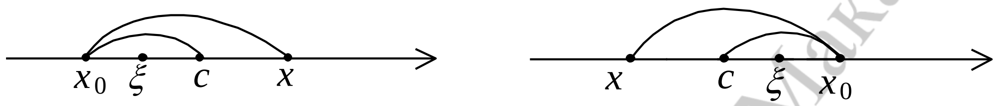

Рис. 19.

Следовательно, $y_M - y_T \geq 0$. ■

Примеры. **1.** Для функции $y = e^x$ имеем $\forall x \in R$: $y'' = e^x > 0$.

Следовательно, функция является выпуклой вниз на $(-\infty, +\infty)$.

2. Для функции $y = x^3$ имеем $y'' = 6x$.

При $x \in (-\infty, 0)$: $y'' < 0$; на этом интервале функция является выпуклой вверх. При $x \in (0, +\infty)$: $y'' > 0$; на этом интервале функция является выпуклой вниз (рис. 20).

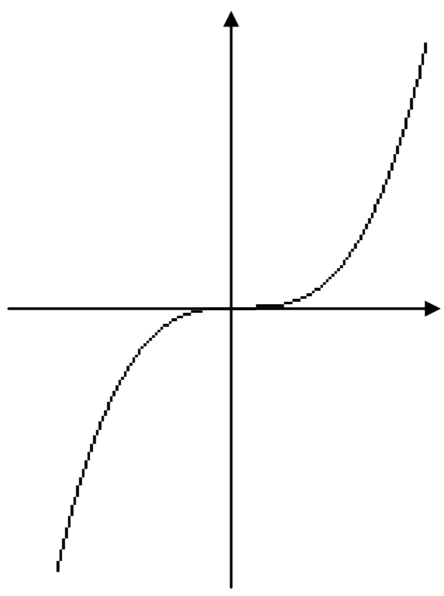

Рис. 20.

2.5. *Точки перегиба*

Определение. Если функция f на интервалах (a, x_0) и (x_0, b) имеет противоположные направления выпуклости, то x_0 называется *точкой перегиба функции* f. Соответствующая точка графика функции $M_0(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции* (рис. 21).

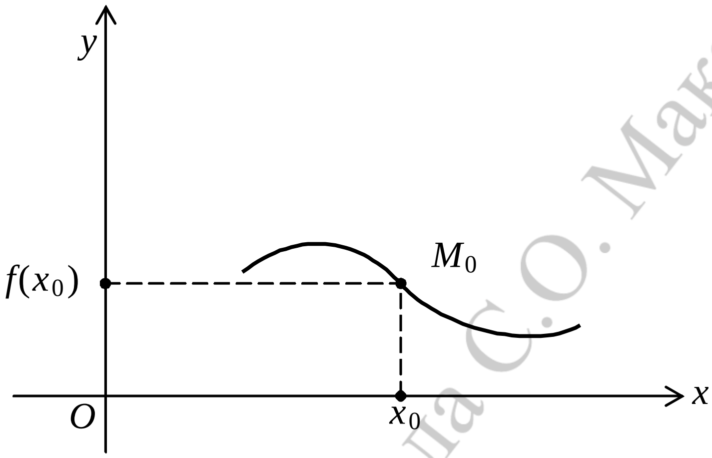

Рис. 21.

В последнем примере $x = 0$ является точкой перегиба функции, а точка (0;2) — точкой перегиба графика функции.

Замечание. При переходе аргумента через точку перегиба x_0 направление выпуклости меняется, и, значит, в точке графика $M_0(x_0; f(x_0))$ касательная переходит с одной его стороны на другую (рис. 22).

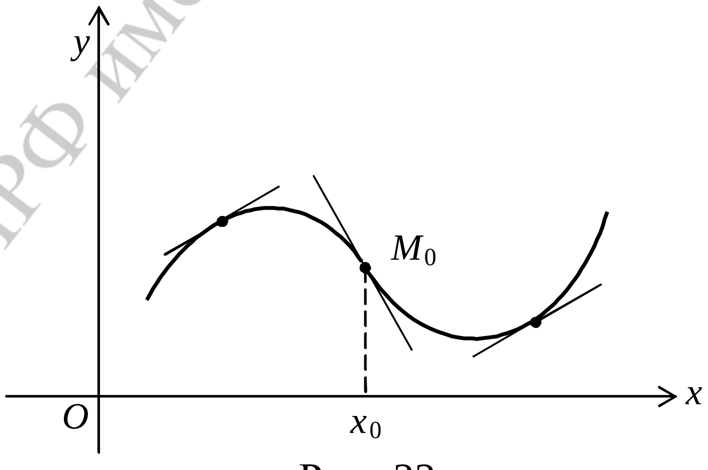

Рис. 22.

Теорема (*достаточный признак точки перегиба*). Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b), и $x_0 \in (a,b)$. Если на интервалах (a, x_0) и (x_0, b) вторая производная

f'' имеет разные знаки, то x_0 — точка перегиба.

Доказательство. Различие знаков f'' слева и справа от точки x_0 влечет за собой противоположность направлений выпуклости графика функции f. ■

Замечание. «Подозрительными на перегиб» являются критические точки первой производной (в частности, ее стационарные точки, т.е. корни уравнения $f''(x)=0$); для решения вопроса о существовании перегиба нужно исследовать знак второй производной слева и справа от каждой подозрительной точки.

2.6. *Асимптоты графика функции*

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$ (при $x\to+\infty$), если при указанном стремлении аргумента x

$$|f(x)-(kx+b)|\to 0. \qquad (*)$$

В частном случае, при $k=0$, наклонная асимптота является горизонтальной (рис. 23в).

Определение. Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов функции в точке x_0 бесконечен: $f(x_0-0)=\infty$ или $f(x_0+0)=\infty$ (рис. 23г).

Геометрический смысл этих определений состоит в том, что прямая L является асимптотой графика l функции f, если по мере удаления переменной точки $M(x; f(x))\in l$ от начала координат на бесконечность расстояние δ от этой точки до прямой L стремится к нулю (рис. 23 а, б, в, г).

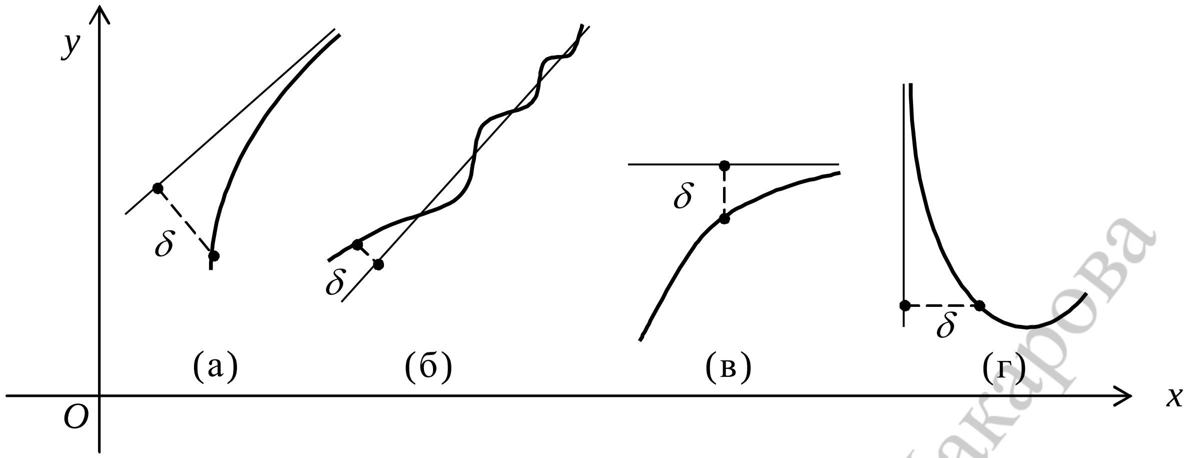

Рис.23.

Действительно, пусть δ — расстояние от точки $M(x; f(x))$ графика функции f до асимптоты L (рис. 24). Если асимптота L не является вертикальной, и α — ее угол наклона, то при $x \to +\infty$ точка M неограниченно удаляется от начала координат.

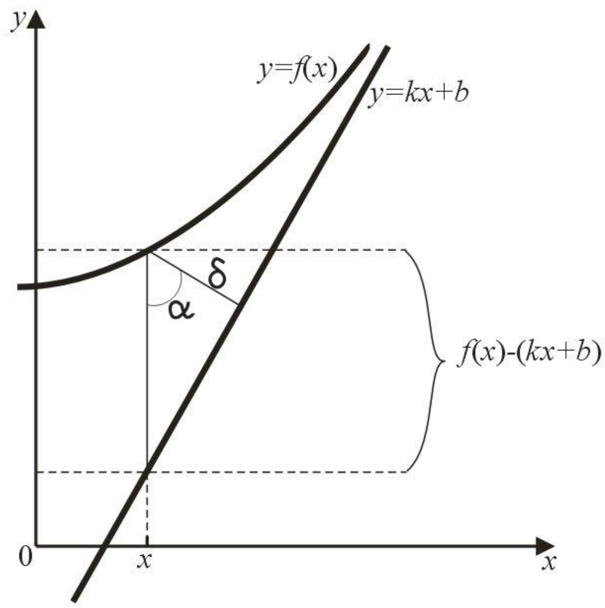

Рис. 24.

Из (*) при этом получаем

$$\delta = |\, f\,(x) - (kx + b)| \cdot \cos\alpha \to 0.$$

Если же L — вертикальная асимптота с уравнением $x = x_0$, то при $x \to x_0 + 0$ ($x \to x_0 - 0$) ордината $y_M = f(x)$ точки M, а вместе с ней и расстояние от этой точки до начала координат, неограниченно возрастают. При этом $\delta = |x - x_0| \to 0$.

Теорема (*критерий существования наклонной асимптоты*). Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ являлась при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) наклонной асимптотой функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) существовали и были конечны два предела:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$.

Доказательство. Необходимость. Пусть прямая $y = kx + b$ является при $x \to +\infty$ наклонной асимптотой. Используя теорему о структуре сходящейся переменной ([1], п. 3.2), из условия (*) получаем:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{kx + b + \alpha(x)}{x}\right) = k + 0 + 0 = k;$$

далее,

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Достаточность. Пусть

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k;\; \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - (kx + b)| = \lim_{x\to+\infty} |(f(x) - kx) - b| = 0. \blacksquare$$

Примеры. 1. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$;

здесь $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = 2$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - 2x) = -3$. Следовательно, прямая $y = 2x - 3$ является наклонной асимптотой при $x \to \infty$.

2. $y = \ln x$. Применяя правило Лопиталя, находим:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

однако

$$b = \lim_{x \to +\infty} (\ln x - 0 \cdot x) = +\infty.$$

Поскольку второй из пределов бесконечен, то график логарифмической функции не имеет наклонной асимптоты.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$, следовательно прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В.О. Теория пределов. — СПб.: СПГУВК. 2003. 43 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988. 431 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.1 . — М.: Наука, 1978. 456 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

М.Ю.Ястребов

МАТЕМАТИКА

ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие