Федеральное агентство морского и речного транспота
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С. О. МАКАРОВА**

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА
Кафедра комплексного обеспечения информационной безопасности

М. Ю. Ястребов
И. В. Ланева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОМЕХ В КАНАЛАХ СВЯЗИ

Учебное пособие

*Рекомендовано Редакционно-издательской комиссией
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова*

Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова
2019

УДК 517.9
ББК 22.16
Я85

Рецензенты:
Молдовян Н. А., д-р техн. наук, проф.
(Лаборатория кибербезопасности
и постквантовых криптосистем СПИИРАН);
Кузнецов В. О., канд. физ.-мат. наук, доц.
(ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова)

Я85 **Ястребов, М. Ю.**
Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи : учеб. пособие / М. Ю. Ястребов, И. В. Ланева. — СПб. : Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2018. — 80 с.

Предназначено для студентов 3-го курса направления 10.03.01 «Информационная безопасность», специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» и для углубленного изучения магистрам по направлению 10.04.01 «Информационная безопасность».

Содержание соответствует рабочей программе дисциплины направления 10.03.01 «Информационная безопасность».

Рекомендовано Редакционно-издательской комиссией ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова. Протокол № 4 от 23.11.2018 года.

УДК 517.9
ББК 22.16

«Ах, господин математик! Вы не верите в Случай!»
Луи Шадурн

ВВЕДЕНИЕ

В теории вероятностей с помощью понятия случайного процесса формализуется представление о случайной величине, вероятностные свойства которой (функция распределения и выражаемые через нее характеристики) меняются со временем. Таким образом, в каждый момент времени мы имеем дело с новой случайной величиной.

Приведем примеры.

1. Пусть случайная величина X выражает высоту морской волны в ветреную погоду. В отдельный момент времени t на обозреваемой поверхности моря наблюдатель фиксирует всевозможные значения высоты (разумеется, в некоторых границах), но при этом различные диапазоны значений представлены с различной частотой. Это дает функцию распределения высоты волны для данного момента. С течением времени, например, по мере усиления, а затем ослабления волнения, будут наблюдаться другие распределения случайной величины X, которая, следовательно, оказывается зависящей от времени: $X = X(t) = X_t$.

2. Какая-либо экономическая характеристика, например, производительность труда, платежеспособный спрос, среднедушевой доход и т. п. имеет для каждого отдельного момента времени определенное распределение значений по регионам. Постепенное изменение экономической ситуации в стране может по-разному отражаться на динамике показателя в регионах. В результате для разных моментов времени возникают различные распределения частоты значений характеристики.

3. Средняя продолжительность X одного телефонного разговора имеет большое значение для планирования эффективной работы АТС. В разное время суток эта длительность, естественно, меняется (например, ночью доля коротких (экстренных) сообщений в общем потоке сообщений увеличивается). Таким образом, случайная величина X явно зависит от времени суток.

4. В роли параметра, от которого зависит распределение значений случайной величины X, может выступать не только время. Так, диаметр d ткацкой нити, вырабатываемой станком, случайным образом колеблется вдоль нити. Если принять в качестве параметра t длину от начала нити, то для группы однородных станков получаем случайную величину d_t при каждом значении t.

Глава 1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Случайные величины

Определение. Случайной величиной называется числовая величина, удовлетворяющая двум условиям:

1) в результате испытания она принимает неизвестные заранее значения;

2) принятие ею значения, лежащего в каком-либо заранее заданном промежутке, является случайным событием, имеющим определенную вероятность.

Второе условие означает, что в теории вероятностей рассматриваются в качестве специальных объектов — случайных величин — не любые величины с неизвестными заранее значениями, а только такие, которые:

– во-первых, связаны с многократно воспроизводимыми (в неизменных контролируемых условиях) испытаниями;

– во-вторых, принимают значения из любого заранее заданного диапазона с относительной частотой, которая проявляет при большом числе испытаний свойство устойчивости.

Будем обозначать случайные величины прописными латинскими буквами: X, Y, Z и т. п.

1.2. Функция распределения случайной величины

Определение. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, заданная при каждом $x \in (-\infty, +\infty)$ формулой

$$F(x) = P(X < x).$$

Таким образом, $F(x)$ выражает вероятность случайного события, которое заключается в том, что в результате испытания случайная величина X примет значение, меньшее аргумента x.

Функция распределения является исчерпывающим описанием случайной величины. Все ее характеристики и свойства определяются этой функцией.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$

3. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей:

$$F(a) \le F(b) \text{ при } a < b.$$

4. Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x > b.$$

5. Поведение на бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

или в другой записи:

$$F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1.$$

6. Функция распределения непрерывна слева, т. е. для каждого x_0 левосторонний предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0),$$

или в другой записи

$$F(x_0 - 0) = F(x_0).$$

1.3. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Случайная величина X называется дискретной, если все ее возможные значения можно представить в виде конечной или бесконечной последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots .$$

Определение. Законом распределения дискретной **с**лучайной величины X называется таблица (конечная или бесконечная), содержащая все ее возможные значения x_i и вероятности принятия этих значений $p_i = P(X = x_i)$:

X:	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P:	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Будем обозначать закон распределения также в виде

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots; \;\; p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \text{ или } (x_i; p_i).$$

Имеет место равенство

$$\sum_i p_i = 1$$

(если множество возможных значений бесконечно, то левая часть понимается как сумма ряда, т. е. как предел частичных сумм).

1.4. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями, соответственно, $p_1, p_2, ..., p_n$. Если при проведении N испытаний значение x_i появилось k_i раз (так что $k_1 + k_2 + ... + k_n = N$)), то среднее арифметическое $\overline{X}$ реализованных значений представляется в виде

$$\overline{X} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n}{N} = \frac{k_1}{N} x_1 + \frac{k_2}{N} x_2 + ... + \frac{k_n}{N} x_n.$$

Отношение $\frac{k_i}{N} = w_i$ является относительной частотой события $(X = x_i)$. При большом числе испытаний относительные частоты w_i колеблются вокруг соответствующих теоретических вероятностей p_i. Поэтому $\overline{X}$ колеблется вокруг значения $p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$. Это является основанием для следующего определения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X с конечным множеством значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и с вероятностями этих значений, соответственно, $p_1, p_2, ..., p_n$ называется число

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n,$$

или в краткой записи

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X с бесконечным множеством значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и с вероятностями, $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ называется сумма ряда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

При этом предполагается, что ряд является абсолютно сходящимся (т. е. существует предел последовательности частичных сумм, составленных из модулей его членов). Если абсолютной сходимости нет, то считают, что математическое ожидание не существует.

Статистический смысл математического ожидания: M(X) — это число, вокруг которого колеблется среднее арифметическое реализованных значений случайной величины при большом числе испытаний.

1.5. Свойства математического ожидания

1. Если случайная величина X является постоянной («неслучайной») величиной: $X = a$, т. е. имеет закон распределения $(a;1)$, то $M(X) = a$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(kX) = kM(X)$.

3. Пусть случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$. Тогда $M(X+Y) = M(X)+M(Y)$.

4. Математическое ожидание произведения случайных величин.

Определение. Случайные величины X_1, X_2, ..., X_n называются независимыми, если для любых промежутков $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$,...,$\langle a_n, b_n\rangle$ независимы в совокупности события $(X_1 \in \langle a_1, b_1\rangle)$, $(X_2 \in \langle a_2, b_2\rangle)$, …, $(X_n \in \langle a_n, b_n\rangle)$.

Определение. Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, образующие бесконечную последовательность, называются независимыми, если независимы случайные величины в любом их конечном наборе.

В частности, если X и Y независимы, то для любых чисел a и b:

$$P\big((X=a)(Y=b)\big) = P\big((x \in [a,a])(Y \in [b,b])\big) =$$

$$= P(X \in [a,a])P(Y \in [b,b]) = P(X=a)P(Y=b).$$

Утверждение. Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$. Тогда $M(XY) = M(X)M(Y)$.

1.6. Дисперсия дискретной случайной величины

Определение. Пусть у дискретной случайной величины X с законом распределения $(x_1, x_2, ..., x_n, ...;\ \ p_1, p_2, ..., p_n, ...)$ существует математическое ожидание $M(X) = m$. Случайная величина $\overset{\circ}{X} = X - m$ со значениями $(x_i - m)$ называется отклонением (от математического ожидания).

Если при большом числе реализаций случайной величины просуммировать полученные отклонения, то их значения разных знаков в значительной степени погашают друг друга, и такая сумма не может служить мерой рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания. Для того чтобы избежать подобного взаимного погашения при оценке разброса значений X вокруг m, отклонения перед суммированием возводят в квадрат.

Определение. Пусть у случайной величины X существует математическое ожидание *M(X).* Ее дисперсией называется число $D(X) = M\left((X-m)^2\right)$, т. е. математическое ожидание квадрата отклонения.

Статистический смысл дисперсии: D(X) служит мерой рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Общее определение дисперсии принимает применительно к дискретной случайной величине следующий вид:

– если X является дискретной случайной величиной с конечным множеством значений и законом распределения (x_1, x_2, ..., x_n,..; p_1, p_2,..., p_n, ...), то отклонение $X - m$ имеет закон распределения ($x_1 - m$, $x_2 - m, ..., x_n - m$; $p_1, p_2, ..., p_n$), и, в соответствии с определением математического ожидания, $D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2$;

– если X является дискретной случайной величиной с бесконечным множеством значений и законом распределения (x_1, x_2, ..., x_n, ...; p_1, p_2, ..., p_n, ...), то $D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2$.

Если ряд в правой части расходится, то дисперсия не существует.

Если у случайной величины не существует математического ожидания, то понятие дисперсии для нее не вводится.

Среднее квадратическое отклонение. В случае, когда случайная величина X имеет размерность (метры, килограммы и т. п.), размерность дисперсии *D(X)* равна квадрату размерности X. Поэтому наряду с дисперсией в качестве меры рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания применяют также арифметический квадратный корень из дисперсии. Последний уже имеет размерность, совпадающую с размерностью X.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X, называется число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

1.7. Свойства дисперсии

1. Для дисперсии справедлива формула $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.
2. $D(X) \geq 0$.
3. $D(kX) = k^2 D(X)$.

4. Если случайная величина X является постоянной («неслучайной») величиной: $X = a = \text{const}$, т. е. имеет закон распределения $(a;\ 1)$, то $D(X) = 0$.

5. Обратно, если $D(X) = 0$, то случайная величина X является постоянной: $X = a = \text{const}$.

6. Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Замечание. Аналогичное утверждение имеет место и для суммы / разности нескольких независимых случайных величин. Например, $D(X+Y+Z) = D((X+Y)+Z) = D(X+Y) + D(Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)$.

7. Независимость константы. Если случайная величина X является постоянной $X = a = \text{const}$, т. е. с вероятностью 1 принимает значение a, то для всякой случайной величины Y имеет место независимость X и Y.

8. Математическое ожидание и дисперсия среднего арифметического. Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и имеют одинаковое математическое ожидание, равное m, и одинаковую математическую дисперсию, равную d, то для их среднего арифметического $Y = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ справедливы формулы:

$$M(Y) = m; \quad D(Y) = \frac{d}{n}.$$

Таким образом, дисперсия среднего арифметического в n раз меньше исходной дисперсии отдельного слагаемого. Иными словами, среднее арифметическое имеет меньшее рассеивание вокруг математического ожидания m. Это связано с тем, что в среднем арифметическом при суммировании отклонения разных знаков в значительной степени погашают друг друга.

1.8. Плотность непрерывной случайной величины

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если существует неотрицательная кусочно-непрерывная функция $p(x)$, интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ и такая, что функция распределения представима в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt.$$

Функция $p(x)$ называется в этом случае плотностью распределения случайной величины.

1.9. Свойства плотности распределения

1. Если $p(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то $F(X)$ дифференцируема на (a,b), и $F'(X)=p(x)$. В этом случае $F(X)$ является одной из первообразных для плотности.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

3. Для непрерывной случайной величины X вероятность принять значение из полуоткрытого промежутка $[a,b)$ («вероятность попадания в промежуток») равна интегралу от плотности по этому промежутку

$$P(a \le X < b) = \int\limits_a^b p(x)\,dx.$$

4. Для непрерывной случайной величины X вероятность принять любое заранее заданное значение a равна нулю:

$$P(X=a)=0$$

(иными словами, «вероятность попадания в точку» равна нулю).

1.10. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью *p(x)* называется несобственный интеграл

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

причем предполагается, что этот интеграл сходится абсолютно, т. е. сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\,p(x)\,dx$.

Если абсолютной сходимости нет, то для такой непрерывной случайной величины математическое ожидание не определено.

Математическое ожидание функции случайного аргумента. Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$, и $f(u)$ — функция числового аргумента, которая непрерывна на $(-\infty,+\infty)$. Тогда $f(X)$

принимает вместе со случайным аргументом X случайные значения и является случайной величиной.

Можно доказать, что случайная величина $f(X)$ также является непрерывной, и для ее математического ожидания справедлива формула

$$M(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\,dx.$$

Свойства математического ожидания в непрерывном и дискретном случае аналогичны.

1.11. Дисперсия непрерывной случайной величины

Применительно к непрерывной случайной величине X с плотностью $p(x)$ и математическим ожиданием $M(X) = m$ общее определение дисперсии

$$D(X) = M\left((X-m)^2\right)$$

принимает вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)dx.$$

Если несобственный интеграл расходится, то дисперсия не существует.

Свойства дисперсии непрерывной случайной величины также аналогичны свойствам дисперсии для дискретного случая.

Для непрерывной случайной величины сохраняется определение среднего квадратического отклонения

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

1.12. Распределение Пуассона

Закон распределения Пуассона характерен для распределения числа наступлений редких событий за фиксированный промежуток времени при большом числе наблюдений. Предполагается, что данные события происходят с фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

Определение. Дискретная случайная величина X с бесконечным множеством значений распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$ с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Для распределения Пуассона: $M(X)=\lambda$; $D(X)=\lambda$.

1.13. Равномерное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\notin[a,\ b];\\ c\ , \text{ если } x\in[a,\ b].\end{cases}$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 1.

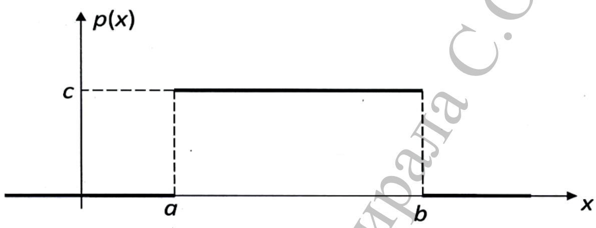

Рис. 1. График плотности равномерного распределения

Если непрерывная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, то:

$$c=\frac{1}{b-a};\ M(X)=\frac{a+b}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

где число $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a,b]$; число $(b-a)$ — длина отрезка $[a,b]$.

1.14. Нормальное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение (распределение Гаусса) с параметрами a и $\sigma>0$, если ее плотность имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

График плотности нормального распределения, изображенный на рис. 2, называется нормальной кривой или кривой Гаусса.

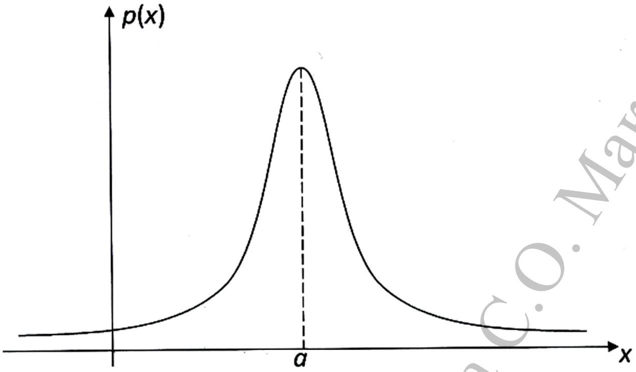

Рис. 2. График плотности нормального распределения

При $a=0$, $\sigma=1$ плотность нормального распределения является дифференциальной функцией Лапласа

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x).$$

Функция распределения F_N в этом случае задается выражением

$$F_N(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt+\int_{0}^{x}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}+\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа.

Зависимость нормальной кривой от параметра a (при $a_1<a_2$ и постоянном σ) изображена на рис. 3. Вертикальная прямая $x=a$ является осью симметрии нормальной кривой.

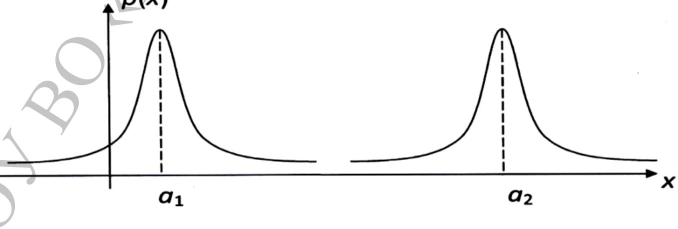

Рис. 3. Зависимость нормальной кривой от параметра a (при $a_1<a_2$ и постоянном σ)

Зависимость нормальной кривой от параметра σ (при постоянном a) изображена на рис. 4.

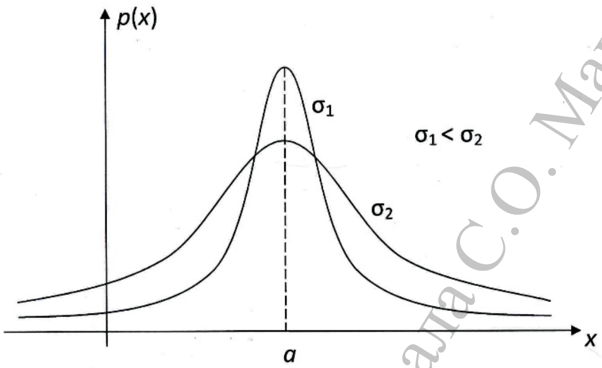

Рис. 4. Зависимость нормальной кривой от параметра σ (при постоянном a)

При увеличении σ кривая становится более пологой, так что далекие от a значения случайной величины X приобретают бóльшую вероятность, реализуются чаще; разброс значений вокруг a при этом увеличивается.

Эти свойства нормальной кривой проясняет вероятностный смысл параметров a и σ: для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ, имеют место равенства:

$$M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2.$$

Нормальное распределение играет исключительно важную роль при математическом описании многих процессов, имеющих вероятностную, случайную (говорят также — стохастическую) природу.

Дифференциальная функция Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ является плотностью нормального закона с параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$.

Интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ является одной из первообразных функции $\varphi(x)$. Функцией распределения нормального закона с параметрами $a = 0,\ \sigma = 1$ является $\Phi(x) + \frac{1}{2}$.

1.15. Показательное распределение

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$$

График плотности показательного распределения изображен на рис. 5.

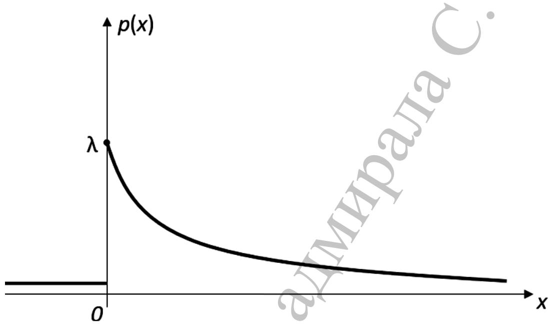

Рис. 5. График плотности показательного распределения

Если непрерывная случайная величина имеет показательное распределение с параметром λ, то для ее математического ожидания и дисперсии справедливы формулы:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

1.16. Сходимость по вероятности

Определение. Число a называется пределом по вероятности последовательности случайных величин X_n, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1.$$

Говорят также, что X_n сходится по вероятности к числу a. Обозначение: $X_n \xrightarrow{(P)} a$. Это означает, что с увеличением номера n вероятность события $(|X_n - a| < \varepsilon)$ неограниченно приближается к единице, т. е. событие становится все более достоверным.

1.17. Закон больших чисел

Термином «закон больших чисел» объединяют круг теорем, утверждающих, что с вероятностью близкой к единице произойдет некоторое случайное событие A, зависящее от неограниченно увеличивающегося числа других случайных событий, каждое из которых оказывает лишь незначительное влияние на A.

Общий закон больших чисел в форме Чебышева

Утверждение. Пусть последовательность случайных величин X_n удовлетворяет трем условиям:

– случайные величины X_n независимы;

– имеют математические ожидания $M(X_n)$ и дисперсии $D(X_n)$;

– дисперсии ограничены в совокупности, т. е. при всех n

$$D(X_n) \le C = \text{const}.$$

Тогда

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \xrightarrow{(P)} 0.$$

Частный закон больших чисел в форме Чебышёва

Утверждение. Пусть случайные величины X_n независимы, и имеют одинаковые математические ожидания $M(X_n) = m$ и одинаковые дисперсии $D(X_n) = d$. Тогда имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{(P)} m.$$

Условия теоремы выполняются, в частности, если независимые случайные величины имеют одинаковое распределение (одинаковую функцию распределения), и у них существуют математическое ожидание и дисперсия.

Закон больших чисел является математическим выражением давно установленного эмпирически факта устойчивости среднего арифметического большого числа независимых случайных величин, — устойчивости, при которой существенные отклонения среднего арифметического реализованных значений от общего математического ожидания отдельных слагаемых являются редкими событиями. Это существенно дополняет свойство дисперсии среднего арифметического.

Причиной такой устойчивости является взаимное погашение отклонений разных знаков отдельных слагаемых при их суммировании в среднем арифметическом.

Закон больших чисел в форме Бернулли

Утверждение. Пусть случайная величина $X_n = w(A) = \frac{k(A)}{n}$ — относительная частота события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха $P(A) = p$. Тогда имеет место сходимость по вероятности

$$w(A) \xrightarrow{(P)} p.$$

Закон больших чисел в данной форме является математическим выражением эмпирического закона больших чисел, в соответствии с которым при большом числе испытаний относительная частота $w(A)$ колеблется вблизи теоретической вероятности p.

Закон больших чисел в форме Хинчина

Утверждение. Пусть последовательность случайных величин X_n удовлетворяет трем условиям:

– $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ независимы;

– имеют одинаковую функцию распределения $F_{X_i}(x) = F(x)$ (i = 1, 2, ..., n, ...);

– имеют математическое ожидание $M(X_i) = m\, (i = 1, 2, ..., n, ...)$.

Тогда имеет место сходимость по вероятности среднего арифметического случайных величин к их общему математическому ожиданию

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{(P)} m.$$

1.18. Корреляция случайных величин

Нормированные случайные величины

Определение. Случайная величина X называется центрированной, если она имеет математическое ожидание, равное нулю: $M(X) = 0$. В этом случае $D(X) = M(X^2)$.

Напомним, что для случайной величины X, имеющей математическое ожидание $M(X) = m$, случайная величина $\bar{X} = X - m$ называется отклонением (отклонением X от математического ожидания). Отклонение $\bar{X}$ является центрированной случайной величиной.

Определение. Случайная величина X называется нормированной, если она имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице: $M(X) = 0,\ \ D(X) = 1$.

Для случайной величины X, у которой $M(X)=m$, $D(X)=\sigma^2>0$ (так что $\sigma=\sigma(X)$ — среднеквадратическое отклонение), случайная величина $X'=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{\bar{X}}{\sigma}$ является нормированной.

Корреляционный момент

Определение. Пусть случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$. Их корреляционным моментом μ_{XY} называется математическое ожидание произведения отклонений

$$\mu_{XY}=M(\bar{X}\bar{Y})=M\left[(X-M(X))\cdot(Y-M(Y))\right].$$

Определение. Случайные величины X и Y называются коррелированными, если их корреляционный момент не равен нулю: $\mu_{XY}\neq 0$.

Определение. Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если их корреляционный момент равен нулю: $\mu_{XY}=0$.

Если случайные величины X и Y независимы, то их корреляционный момент равен нулю: $\mu_{XY}=0$. Таким образом, если случайные величины X и Y являются коррелированными, то они зависимы.

Коэффициент корреляции

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y, имеющих корреляционный момент μ_{XY} и средние квадратические отклонения $\sigma_X>0$, $\sigma_Y>0$, называется число $r_{XY}=\dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$.

В то время как корреляционный момент μ_{XY} является размерной величиной, значение которой зависит от выбора единиц измерения X и Y, коэффициент корреляции r_{XY} является безразмерной величиной.

Справедливо неравенство $|r_{XY}|\le 1$. Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{XY}=0$.

Критерий линейной связи случайных величин

Для того чтобы случайные величины X и Y были связаны функциональной линейной зависимостью вида $Y=kX+b$ ($k\neq 0$), необходимо и достаточно выполнение условия $|r_{XY}|=1$.

В этом случае $k=\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$; $b=\left(M(Y)-\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}M(X)-\sigma_Y a\right)$.

По степени близости модуля коэффициента корреляции $|r_{XY}|$ к единице оценивается близость статистической зависимости между X и Y к линейной функциональной зависимости.

Глава 2. ЦЕПИ МАРКОВА

2.1. Основные определения

Рассмотрим последовательность испытаний $И_1$, $И_2$, ..., $И_n$, ... (возможно, зависимых), причем число исходов во всех испытаниях одинаково — конечно (≥ 3) или счетно (исходы можно занумеровать натуральным рядом). Испытание $И_n$ имеет исходы $A_i^{(n)}$:

$$И_n\,(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_i^{(n)}, ...).$$

Определение. Испытания $И_1$, $И_2$, ..., $И_n$, ... образуют цепь Маркова, если для любых номеров испытаний $n > n_1 > n_2 > ... > n_l$ и для любых номеров исходов этих испытаний $i, i_1, i_2, ..., i_l$ имеет место равенство условных вероятностей

$$P(A_i^{(n)} / A_{i_1}^{(n_1)} A_{i_2}^{(n_2)} ... A_{i_l}^{(n_l)}) = P(A_i^{(n)} / A_{i_1}^{(n_1)}). \qquad (1)$$

Замечание. Содержательно условие (1) означает, что условные вероятности зависят только от исходов последнего предшествующего из рассматриваемых испытаний. Если трактовать значения n как моменты времени n(будущее) $> n_1$(сейчас) $> n_2$(прошлое), то (1) означает, что «прошлое не влияет на будущее при фиксированном настоящем».

Объект, описываемый цепью Маркова, принято называть системой, а исходы испытаний — состояниями, в которые переходит система в результате испытания.

Определение. Переходными вероятностями (вероятностями переходов) цепи Маркова называются условные вероятности ${}_nP_{ij} =$ $= P(A_j^{(n)} / A_i^{(n-1)})$, которые трактуются как вероятности перехода системы из состояния i, в котором система находилась в момент $n-1$, в состояние j в момент n.

Определение. Цепь Маркова называется однородной, если вероятности перехода не зависят от n: ${}_nP_{ij} = P_{ij}$.

Замечание. Содержательно условие однородности означает что вероятностный механизм переходов системы, для которой исходы являются возможными состояниями, не меняется со временем.

Далее будут рассматриваться только однородные цепи Маркова.

Определение. Матрица $\mathrm{P} = (P_{ij})$ называется вероятностной матрицей переходов (или матрицей переходных вероятностей, или, более кратко, матрицей переходов).

Свойства матрицы переходов

Теорема 1.

$$P_{ij} \geq 0, \tag{2}$$

поскольку вероятность любого случайного события неотрицательна;

$$\sum_j P_{ij} = 1, \tag{3}$$

т. е. сумма элементов каждой строки равна единице. Содержательно это означает, что система в следующий момент обязательно перейдет в некоторое состояние, так что данная сумма выражает вероятность достоверного события Ω.

Доказательство. На основании аксиомы о вероятности суммы попарно несовместных событий (а именно, событий $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_j^{(n)}, ...$) получаем:

$$\sum_j P_{ij} = \sum_j P(A_j^{(n)} / A_i^{(n-1)}) = P(A_1^{(n)} + A_2^{(n)} + ... / A_i^{(n-1)}) =$$

$$= P(\Omega / A_i^{(n-1)}) = 1.$$

Поскольку $A_1^{(n)} + A_2^{(n)} + ... = \Omega$, из состояния $A_{i-1}^{(n-1)}$ система обязательно переходит в момент n в некоторое состояние $A_j^{(n)}$.

Определение. Квадратная матрица $\mathrm{P} = (P_{ij})$ (размера $r \times r$ — когда число исходов в каждом испытании конечно и равно r, либо бесконечная вправо и вниз — когда исходы испытаний образуют бесконечное множество), удовлетворяющая условиям (2) и (3), называется вероятностной или стохастической.

Таким образом, матрица переходных вероятностей $\mathrm{P} = (P_{ij})$ является стохастической.

Определение. Начальными вероятностями цепи Маркова называются вероятности $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, ..., P_j^{(1)}, ...$ пребывания системы в состояниях $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, ..., A_j^{(1)}, ...$ в начальный момент, т. е. при $n = 1$.

Вероятностные свойства цепи Маркова исчерпывающим образом описываются матрицей переходов $\mathrm{P} = (P_{ij})$ и матрицей вероятностей начальных состояний $\mathrm{P}_0 = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, ..., P_j^{(1)}, ...)$.

2.2. Неограниченное случайное блуждание

Случайное блуждание по лучу

Рассмотрим частицу, которая в моменты времени 1, 2, 3... совершает скачки по целым положительным числам числовой оси. Находясь в точке $i \geq 2$ (т. е. в состоянии i), она в следующий момент переходит либо в правую соседнюю точку i+1 (в состояние i+1) с вероятностью p, либо в левую соседнюю i–1 (в состояние i–1) с вероятностью q (так что $p, q > 0,\ p + q = 1$). Находясь в точке 1, частица с вероятностью p переходит в 2 и с вероятностью q остается на месте (рис. 6).

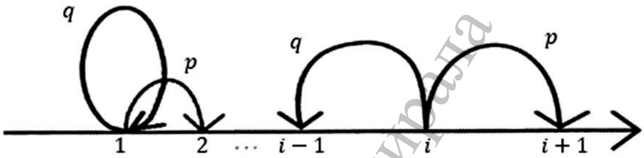

Рис. 6. Скачки частицы
по целым положительным числам числовой оси

Эта система описывается цепью Маркова с бесконечным множеством состояний. Ее вероятностная матрица переходов имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} q\,p\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 \ldots \\ q\,0\,p\,0\,0\,0 \ldots 0 \ldots \\ 0\,q\,0\,p\,0\,0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots 0\,q\,0\,p \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Случайное блуждание с поглощением

Рассмотрим частицу, которая в моменты времени 1, 2, 3... совершает скачки по целым положительным числам i отрезка $[1, a]$ по следующей схеме. Если $2 \leq i \leq a - 1$, то с вероятностями p и q точка может перейти вправо (в точку i + 1) или, соответственно, влево (в точку i – 1). Если же i = 1 или i = a, то частица навсегда (с вероятностью 1) остается в этой крайней точке отрезка — «прилипает к стенке» (рис. 7).

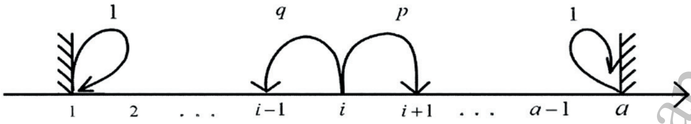

Рис. 7. Скачки частицы по целым положительным числам *i* отрезка

Эта система описывается цепью Маркова с числом состояний a (по количеству целых точек отрезка $[1,a]$). Ее вероятностная матрица переходов размера $a \times a$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ q\,0\,p\,0\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,q\,0\,p\,0\,0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots 0\,q\,0\,p \\ 0\,0\,0 \ldots 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Урновая схема диффузии

Рассмотрим следующий процесс: *N* белых и *N* черных шаров распределены произвольным образом по двум урнам, так что в каждой из них находятся *N* шаров. Будем говорить, что система находится в состоянии *k*, если первая урна содержит *k* белых шаров. Таким образом, возможны состояния $k = 0, 1, \ldots, N$.

В дискретные моменты времени из обеих урн случайным образом вынимают по одному шару и меняют их местами. Если эти шары были одного цвета, то новое состояние совпадет с предыдущим; если же цвет шаров различен, то система придет в другое состояние. При этом в каждый момент времени количество белых шаров в первой урне равно количеству черных во второй (рис. 8).

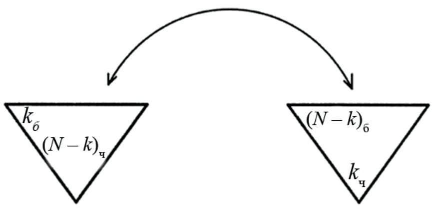

Рис. 8. Урновая схема диффузии

Этот процесс описывается цепью Маркова с вероятностями перехода:

$$P_{00} = 0\,;\; P_{01} = 1\,;\; P_{02} = 0 = \ldots P_{0N} = 0\,;$$

$$P_{kj} = 0\text{ , если } |k - j| > 1;$$

$P_{k\,k-1} = \dfrac{k}{N} \cdot \dfrac{k}{N} = \dfrac{k^2}{N^2}$ — теорема умножения для независимых событий: для обмена местами выбирается белый шар из первой урны и черный из второй;

$P_{k\,k+1} = \dfrac{N-k}{N} \cdot \dfrac{N-k}{N} = \dfrac{(N-k)^2}{N^2}$ — для обмена местами выбирается черный шар из первой урны и белый из второй;

$P_{kk} = \dfrac{k}{N} \cdot \dfrac{N-k}{N} + \dfrac{N-k}{N} \cdot \dfrac{k}{N} = \dfrac{2k(N-k)}{N^2}$ — первое слагаемое выражает вероятность обмена белыми шарами, а второе черными;

$$P_{N0} = \ldots = P_{N-2} = 0;\; P_{N\,N-1} = 1;\; P_{NN} = 0.$$

$P_{k\,k-1} = \dfrac{k}{N} \cdot \dfrac{k}{N} = \dfrac{k^2}{N^2}$ — теорема умножения для независимых событий: для обмена местами выбирается белый шар из первой урны и черный из второй;

$P_{k\,k+1} = \dfrac{N-k}{N} \cdot \dfrac{N-k}{N} = \dfrac{(N-k)^2}{N^2}$ — для обмена местами выбирается черный шар из первой урны и белый из второй;

$P_{kk} = \dfrac{k}{N} \cdot \dfrac{N-k}{N} + \dfrac{N-k}{N} \cdot \dfrac{k}{N} = \dfrac{2k(N-k)}{N^2}$ — первое слагаемое выражает вероятность обмена белыми шарами, а второе черными;

$$P_{N0} = \ldots = P_{N-2} = 0;\; P_{N\,N-1} = 1;\; P_{NN} = 0.$$

По аналогии с реальными физико-химическими процессами диффузии можно утверждать, что при больших n вероятность оказаться в состоянии j слабо зависит от «стартового» состояния i, т. е. можно ожидать при $n \to \infty$ существование предельного значения π_j для вероятности оказаться в состоянии j. В дальнейшем мы убедимся, что при определенных условиях это действительно имеет место.

2.3. Вероятности перехода за *n* шагов Уравнение Маркова

Определение. Вероятностью перехода из состояния A_i в состояние A_j за *n* шагов называется условная вероятность $P(A_j^{(n+k)} / A_i^{(k)})$ (значение *k* на эту вероятность не влияет ввиду однородности цепи).

Будем обозначать эту вероятность через $P_{ij}^{(n)}$; данные вероятности образуют матрицу, которую обозначим через $\mathrm{P}^{(n)}$: $\mathrm{P}^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$. Тогда исходная вероятностная матрица переходов $\mathrm{P} = (P_{ij}) = (P_{ij}^{(1)})$ получает обозначение $\mathrm{P}^{(1)}$ — матрица вероятностей перехода за один шаг. В дальнейшем вместо термина «состояние A_i» будем употреблять более краткое выражение «состояние *i*».

Матрица $\mathrm{P}^{(n)}$ также является стохастической: $P_{ij}^{(n)} \geq 0$ и $\sum_j P_{ij}^{(n)} = 1$. Это доказывается аналогично случаю матрицы $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(1)}$.

Теорема 2. Для любых целых чисел $m \geq 1$ и $n \geq 1$ имеет место равенство

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_k P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}. \tag{4}$$

Суммирование в (4) ведется по всем возможным состояниям *k*.

Равенство (4) называется уравнением Маркова (или уравнением Маркова – Чепмена – Колмогорова).

Доказательство. В целях удобства обозначений для событий *A,B,C* будем записывать при фиксированном *A* условную вероятность $P(B / A)$ в виде $P_A(B)$. Функция $P_A(B)$ также является вероятностью случайных событий B со всеми присущими вероятности свойствами. Для $P_A(...)$ тоже можно определить условные вероятности

$$P_A(B / C) = P(B / CA). \tag{5}$$

Пусть в состоянии *i* система оказалась в момент *s* (*s* может быть произвольным ввиду предположенной однородности цепи). Тогда $P_{ij}^{(m+n)} = P(A_j^{(m+n+s)} / A_i^{(s)})$. В соответствии со сказанным обозначим $P_{A_i^{(s)}}(...) = P_i(...)$.

События $A_1^{(m+s)}, A_2^{(m+s)}, \ldots, A_j^{(m+s)}, \ldots$ образуют полную группу. По формуле полной вероятности с учетом введенных обозначений

$$P_{ij}^{(m+n)} = P_i(A_j^{(m+n+s)}) = \sum_k P_i(A_j^{(m+n+s)} / A_k^{(m+s)}) P_i(A_k^{(m+s)}). \tag{6}$$

Преобразуем оба множителя под знаком последней суммы. С учетом записи (5). Первый множитель

$$P_i(A_j^{(m+n+s)} / A_k^{(m+s)}) = P(A_j^{(m+n+s)} / A_k^{(m+s)} A_i^{(s)}) =$$

(согласно определению цепи Маркова более раннее событие $A_i^{(s)}$ не влияет на последнюю условную вероятность)

$$= P(A_j^{(m+n+s)} / A_k^{(m+s)}) = P_{kj}^{(n)}.$$

Второй множитель

$$P_i(A_k^{(m+s)}) = P(A_k^{(m+s)} / A_i^{(s)}) = P_{ik}^{(m)}.$$

Подставляя эти выражения в (6), получаем

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}.$$

Уравнению Маркова (4) можно придать матричный вид. Сумма попарных произведений $\sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$ есть элемент с индексами i, j произведения матриц $(P_{ik}^{(n)})(P_{kj}^{(m)})$:

$$\mathrm{P}^{(m+n)} = \mathrm{P}^{(m)}\mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}^{(n)}\mathrm{P}^{(m)}.$$

Поскольку при этом $\mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{P}$, то

$$\mathrm{P}^{(2)} = \mathrm{P}^{(1+1)} = \mathrm{P}^{(1)} \cdot \mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{P} = \mathrm{P}^2, \ldots, \ \mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}^n,$$

и уравнение Маркова можно записать в матричной форме:

$$\mathrm{P}^{(m+n)} = \mathrm{P}^m \cdot \mathrm{P}^n = \mathrm{P}^n \cdot \mathrm{P}^m \qquad (7)$$

2.4. Эргодические классы

Важной задачей в теории цепей Маркова является исследование поведения вероятностей перехода за *n* шагов $P_{ij}^{(n)}$ при больших *n*, в частности, предельного поведения при $n \to \infty$.

Определение. Состояние j достижимо из состояния i (обозначение: $i \to j$), если из *i* можно с положительной вероятностью перейти в *j*, т. е. если существует число шагов $\alpha > 0$, для которого $P_{ij}^{(\alpha)} > 0$.

Определение. Состояния i и j называются сообщающимися, если они достижимы друг из друга (обозначение: $i \leftrightarrow j$).

Определение. Состояние i называется существенным, если из $i \to j$ следует $j \to i$.

Это означает, что система, уйдя из состояния i в любое другое состояние, может за несколько шагов вернуться обратно в i.

Определение. Состояние k называется несущественным, если оно не является существенным, т. е. если существует такое j, что j достижимо из k, но k не достижимо из j.

Таким образом, для несущественного состояния k при некотором j существует такое число шагов $\alpha > 0$, что $P_{kj}^{(\alpha)} > 0$, но $P_{jk}^{(s)} = 0$ при всех $s = 1, 2, \ldots$

Свойства достижимости

1. Два существенных состояния i и j либо сообщаются, либо не достижимы друг из друга. Действительно, из $i \to j$ в силу существенности i следует $j \to i$, а тогда эти состояния сообщаются.

2. Если $i \to j$ и $j \to k$, то $i \to k$. Действительно, существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, для которых $P_{ij}^{(\alpha)} > 0$ и $P_{jk}^{(\beta)} > 0$. Тогда по уравнению Маркова $P_{ik}^{(\alpha+\beta)} = \sum_s P_{is}^{(\alpha)} P_{sk}^{(\beta)} \geq P_{ij}^{(\alpha)} P_{jk}^{(\beta)} > 0$ — сумма неотрицательных слагаемых не меньше любого из них.

3. Из существенного состояния можно перейти только в существенное. Действительно, пусть состояние i является существенным, а состояние j — несущественным. Убедимся, что не возможен переход $i \to j$. По условию существует состояние k такое, что k достижимо из j, но j не достижимо из k. Если бы было $i \to j$, то мы имели бы $i \to j$ и $j \to k$, а тогда по свойству 2 был возможен переход $j \to k$. В силу существенности i был бы возможен и обратный переход $k \to i$. В результате оказалась бы возможной цепочка переходов $k \to i$ и $i \to j$, а значит, и переход $k \to j$, что противоречит условию на k.

Определение. Множество состояний A цепи Маркова (не обязательно всех состояний) называется замкнутым, если из него можно перейти только в состояние этого же множества

$$i \in \mathrm{A},\ i \to k \ \Rightarrow\ k \in \mathrm{A}.$$

Теорема 3 (об эргодических классах). Все состояния цепи Маркова делятся на существенные и несущественные. Существенные состояния, в свою очередь разбиваются на замкнутые непересекающиеся классы сообщающихся между собой состояний (эргодические классы).

Замечание. Понятие эргодичности применяется к системам, меняющим со временем свое состояние. Эргодичность заключается (не строго) в том, что в процессе переходов в новые состояния система с положительной вероятностью окажется в некоторый момент в состоянии, близком к любому заданному состоянию (или в самом этом заданном состоянии).

Доказательство. Пусть i_1 — существенное состояние, и E_1 — множество всех состояний, достижимых из i_1. По третьему свойству достижимости все состояния, принадлежащие E_1, являются существенными, а по первому свойству все они сообщаются между собой. Убедимся, что E_1 замкнуто.

Пусть $k \in E_1$ и $k \to l$. Покажем, что $l \in E_1$. Согласно определению множества E_1, имеем $i_1 \to k$; тогда по второму свойству $i_1 \to l \Rightarrow l \in E_1$. Замкнутость множества (класса) E_1 доказана.

Если все существенные состояния цепи содержатся в E_1, то доказательство завершено. В противном случае существует не принадлежащее E_1 существенное состояние с наименьшим номером i_2; тогда обозначим через E_2 множество всех состояний, достижимых из i_2. Убедимся, что E_1 и E_2 не пересекаются. Пусть $l \in E_1 \cap E_2$. Тогда имеем $i_1 \to l$ и $i_2 \to l$, откуда следует, что состояния i_1 и i_2 сообщаются. Противоречие показывает, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Если E_1 и E_2 исчерпывают все существенные состояния, то теорема доказана. В противном случае строим аналогичным образом замкнутый класс E_3, содержащий существенное состояние с наименьшим номером $i_3 \notin E_1 \cup E_2$ и т. д. В результате продолжения этой процедуры по индукции убеждаемся, что каждое существенное состояние на некотором шаге окажется в некотором замкнутом классе.

Оставшиеся состояния цепи (не попавшие ни в один E_1) оказываются несущественными.

Теорема 4 (о существовании эргодических классов). Во всякой цепи Маркова с конечным множеством состояний существует, по крайней мере, одно существенное состояние (и значит, по крайней мере, один эргодический класс).

Доказательство. Выберем какое-либо состояние i_1. Если оно существенное, то доказательство завершено. В противном случае существует состояние i_2 такое, что $i_1 \to i_2$, но не выполняется $i_2 \to i_1$. Если состояние i_2 существенное, то доказательство завершено. В противном случае существует состояние i_3 такое, что $i_2 \to i_3$, но не выполняется $i_3 \to i_2$, и т. д. Поскольку число состояний конечно, то либо на некотором шаге очередное i_k окажется существенным, либо $i_k \to i_j$ при некотором $j < k$. Тогда $i_{j+1} \to i_j$ (рис. 9), что противоречит получению i_{j+1}.

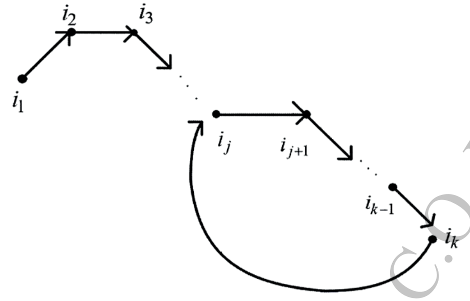

Рис. 9. Зацикливание состояний

2.5. Циклические подклассы

Будем рассматривать цепь Маркова, являющуюся эргодическим классом. Примем без доказательства следующее утверждение из теории чисел.

Лемма (о кратных НОД). Пусть N — некоторое множество целых положительных чисел, и d — наибольший общий делитель всех чисел из N. Пусть, далее, N обладает свойством

$$a, b \in \mathrm{N} \;\Rightarrow\; a + b \in \mathrm{N}\,. \tag{8}$$

Тогда все достаточно большие числа, кратные d, тоже принадлежат N.

Рассмотрим теперь какое-либо состояние i. Обозначим через N_i множество целых чисел α таких, что $P_{ii}^{(\alpha)} > 0$. Таким образом, α — это число шагов, за которое из i можно снова попасть в i. Пусть d_i — наибольший общий делитель всех чисел из N_i. Докажем четыре утверждения о множествах N_i.

1. *Аддитивность.* Множество N_i удовлетворяет условиям леммы

$$\alpha, \beta \in \mathrm{N}_i \;\Rightarrow\; \alpha + \beta \in \mathrm{N}_i\,.$$

Доказательство. По уравнению Маркова

$$P_{ii}^{(\alpha+\beta)} = \sum_k P_{ik}^{(\alpha)} P_{ki}^{(\beta)} \geq P_{ii}^{(\alpha)} P_{ii}^{(\beta)} > 0\,.$$

Следствие. Согласно лемме, отсюда следует, что все достаточно большие числа, кратные d_i, принадлежат N_i.

В частности, при $d = 1$ все достаточно большие натуральные числа $n = n \cdot 1$ принадлежат N_i.

2. *Совпадение НОД*. Пусть *i, j* — произвольные состояния, N_i, N_j — соответствующие им множества. Тогда соответствующие НОД числа обоих множеств равны: $d_i = d_j$.

*Доказательство***.** Поскольку *i, j* находятся внутри эргодического класса, то они сообщаются: $i \leftrightarrow j$. Значит, найдутся целые положительные числа α, β такие, что $P_{ij}^{(\alpha)} > 0,\ P_{ji}^{(\beta)} > 0$. Число $\alpha + \beta \in \mathrm{N}_i \cap \mathrm{N}_j$, так как $P_{ii}^{(\alpha+\beta)} \geq P_{ij}^{(\alpha)} P_{ji}^{(\beta)} > 0$ и, аналогично, $P_{jj}^{(\alpha+\beta)} \geq P_{ji}^{(\beta)} P_{ij}^{(\alpha)} > 0$. Значит, α+β делится и на d_i, и на d_j. Пусть теперь r_i — произвольное число класса N_i. Тогда

$$P_{jj}^{(\alpha+\beta+r_i)} \geq P_{ji}^{(\beta)} P_{ii}^{(r_i)} P_{ij}^{(\alpha)} > 0,$$

откуда $\alpha + \beta + r_i \in \mathrm{N}_j$.

По утверждению 1 класс N_i удовлетворяет условиям леммы, и поэтому для всякого достаточно большого *n* имеем $nd \in \mathrm{N}_i$. Беря это nd_i в качестве r_i, получаем $\alpha + \beta + nd_i \in \mathrm{N}_j$, так что $\alpha + \beta + nd_i$ делится на d_j для всякого достаточно большого *n*. Поскольку и $\alpha + \beta$ делится на d_j, то nd_i делится на d_j. Если выбрать *n* взаимно простым с d_j, то получаем на основании свойств делимости, что d_i делится на d_j. Аналогично доказывается, что d_j делится на d_i, и тогда $d_i = d_j$.

Поскольку все состояния *i*, *j*, *k*... эргодического класса сообщаются, то $d_i = d_j = d_k = \ldots$. Обозначим это общее значение через *d*.

Определение. Число *d* называется делителем класса.

3. *Существование разбиения эргодического класса.* Все состояния цепи с делителем класса *d* разбиваются на непустые непересекающиеся подклассы состояний $C_1, C_2, \ldots, C_d$ так, что из любого состояния $i \in C_r$ за *k* шагов можно перейти только в состояние подкласса C_p, где $p = (r + k) \bmod d$ — остаток от деления $(r + k)$ на *d* (т. е. суммирование ведется по модулю *d*).

Доказательство. Зафиксируем какое-либо состояние i_0. Отнесем к подклассу C_i (i = 1, 2, ..., *d*) те состояния *j*, переход в которые возможен из i_0 за *t* шагов, где $t \equiv i (\bmod d)$. Каждое состояние цепи попадает в некоторый подкласс, поскольку $\{1, 2, \ldots, d\}$ — полная система вычетов по модулю *d.*

Убедимся, что разные подклассы не пересекаются. Действительно, пусть $j \in C_k \cap C_l$. Поскольку $j \in C_k$, то существует число шагов t_1 такое, что $P_{i_0 j}^{(t_1)} > 0$, причем $t_1 \equiv k (\bmod d)$. Аналогично, существует $t_2 : P_{i_0 j}^{(t_2)} > 0,\ t_2 \equiv l (\bmod d)$. Выберем *s* так, что возможен переход из *j* в i_0 за s шагов, т. е. $P_{ji_0}^{(s)} > 0$ (такое s найдется, поскольку в эргодическом классе все состояния сообщаются). Пусть $r \in \mathrm{N}_{i_0}$ (напомним, N_{i_0} — совокупность тех натуральных чисел α, для которых $P_{i_0 i_0}^{(\alpha)} > 0$, т. е. из i_0 можно вернуться в i_0 за α шагов). Тогда

$$P_{i_0 i_0}^{(s+t_1+r)} \geq P_{i_0 j}^{(t_1)} P_{j i_0}^{(s)} P_{i_0 i_0}^{(r)} > 0,$$

и аналогично

$$P_{i_0 i_0}^{(s+t_2+r)} \geq P_{i_0 j}^{(t_2)} P_{j i_0}^{(s)} P_{i_0 i_0}^{(r)} > 0.$$

Итак, $s+t_1+r \in \mathrm{N}_{i_0}$ и $s+t_2+r \in \mathrm{N}_{i_0}$. Значит, $s+t_1+r \equiv s+t_2+r (\mathrm{mod}\, d)$ (d — наибольший общий делитель чисел из N_{i_0}, в частности, общий делитель $s+t_1+r$ и $s+t_2+r$), откуда по свойствам сравнений следует $t_1 \equiv t_2 (\mathrm{mod}\, d) \Rightarrow k \equiv l (\mathrm{mod}\, d) \Rightarrow k = l.$

Остается показать, что за один шаг из C_r происходит переход обязательно в C_{r+1} (тогда переход в C_{r+k} происходит за k шагов). Пусть состояние $j \in C_r$ и $P_{js}^{(1)} > 0$. Убедимся, что $s \in C_{r+1}$. Поскольку $j \in C_r$, то существует такое α, что $\alpha \equiv r (\mathrm{mod}\, d)$ и $P_{i_0 j}^{(\alpha)} > 0$. Тогда $P_{i_0 s}^{(\alpha+1)} \geq P_{i_0 j}^{(\alpha)} P_{js}^{(1)} > 0$, так что в состояние s можно перейти из состояния i_0 за α + 1 шагов. Значит, $s \in C_{r+1}$, поскольку из $\alpha \equiv r (\mathrm{mod}\, d)$ следует $\alpha + 1 \equiv r + 1 (\mathrm{mod}\, d)$.

4. Любые два разбиения эргодического класса на циклические подклассы совпадают с точностью до сдвига нумерации.

*Доказательство***.** Пусть по состоянию i_0 получено разбиение

$$C_1, C_2, \ldots, C_d, \tag{9}$$

а по какому-либо другому состоянию — разбиение

$$C_1', C_2', \ldots, C_d'. \tag{10}$$

Состояние i_0 содержится в некотором C_l' (рис. 10).

По утверждению 3 из состояния, принадлежащего C_l', за один шаг можно перейти только в состояние из подкласса C_{l+1}'. Поэтому из i_0 за k шагов, где $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, d)$, можно перейти только в состояние подкласса C_{l+1}'. С другой стороны, подкласс C_1 состоит из тех состояний, в которые из i_0 можно перейти за k шагов, где также $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, d)$. Следовательно, $C_1 \subset C_{l+1}'$ (рис. 10). Аналогично $C_2 \subset C_{l+2}'$, …, $C_d \subset C_{l+d}'$.

Поскольку (9) и (10) — разбиения одного и того же множества, то $C_1 = C'_{l+1}$, …, $C_d = C'_{l+d}$, и т. д.

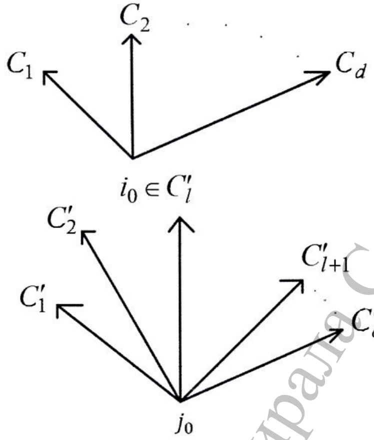

Рис. 10. Разбиения на циклические подклассы

В совокупности последние четыре утверждения устанавливают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5 (о разбиении на циклические подклассы). Каждому эргодическому классу *E* цепи Маркова соответствует делитель класса d_E — натуральное число такое, что:

– переход из любого $i \in E$ снова в *i* возможен лишь за число шагов, кратное d_E ;

– все состояния класса *E* разбиваются на непустые непересекающиеся циклические подклассы $C_1, C_2, ..., C_{d_E}$ так, что из состояния подкласса C_r можно перейти в состояние подкласса C_{r+k} за *k* шагов;

– разбиение на циклические подклассы единственно с точностью до сдвига нумерации подклассов.

2.6. Асимптотическое поведение $P_{ij}^{(n)}$ — случай *d = 1*

Под асимптотическим поведением какой-либо последовательности a_n понимают ее поведение при $n \to \infty$. Наиболее существенным аспектом исследования при этом является выяснение существования и значения предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Далее будем рассматривать цепь Маркова с конечным числом состояний *r*, которые образуют один эргодический класс, причем общий делитель класса $d = 1$.

Лемма 1 (отделенность вероятностей перехода от нуля). Существуют натуральное число N и $\delta > 0$ такие, что выполняется неравенство $P_{ij}^{(N)} \ge \delta$ для всех пар i, j .

Доказательство. Поскольку внутри эргодического класса все состояния сообщаются, то для любой фиксированной пары состояний i, j существует число шагов S такое, что $P_{ij}^{(s)} > 0$. Применяя при $d = 1$ следствие к свойству аддитивности, заключаем, что $P_{jj}^{(n)} > 0$ при всех достаточно больших n (у нас $nd = n \cdot 1 = n$). Тогда и $P_{ij}^{(s+n)} \ge P_{ij}^{(s)} P_{jj}^{(n)} > 0$. Поскольку число состояний цепи, по предположению, конечно, то конечно и число пар i, j, а тогда уже для всех пар i, j имеем $P_{ij}^{(n)} > 0$ при всех достаточно больших n, т. е. при $n \ge N$ для некоторого N. Теперь остается положить $\delta = \min\limits_{i,j}(P_{ij}^{(N)})$.

Замечание. Поскольку матрица P^N является стохастической, то сумма положительных чисел в каждой строке $\sum P_{ij}^{(N)} = 1$, а тогда при всех i, j имеем $\delta \le P_{ij}^{(N)} < 1$. Обозначим: $m_j^{(n)} = \min\limits_{1 \le i \le r} P_{ij}^{(n)}$, $M_j^{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le r} P_{ij}^{(n)}$. Тогда $m_j^{(n)} \le P_{ij}^{(n)} \le M_j^{(n)}$

Лемма 2 (стягивающаяся оценка вероятностей перехода). При фиксированном j последовательность $M_j^{(n)}$ не возрастает, последовательность $m_j^{(n)}$ не убывает, и $m_j^{(l)} \le M_j^{(l)} \le M_j^{(n)}$ при $l > n$.

Доказательство. При некотором α имеем $M_j^{(n+1)} = P_{\alpha j}^{(n+1)}$. Согласно уравнению Маркова:

$$M_j^{(n+1)} = P_{\alpha j}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} P_{\alpha k} P_{kj}^{(n)} \le M_j^{(n)} \sum_{k=1}^{r} P_{\alpha k} = M_j^{(n)} ,$$

поскольку по свойству переходных вероятностей $\sum\limits_{k=1}^{r} P_{\alpha k} = 1$.

Аналогично

$$m_j^{(n+1)} = P_{\beta j}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} P_{\beta k} P_{kj}^{(n)} \ge m_j^{(n)} \sum_{k=1}^{r} P_{\beta k} = m_j^{(n)}.$$

Пусть теперь $l > n$. Тогда $m_j^{(l)} \le M_j^{(l)} \le M_j^{(n)}$.

Замечание. Монотонно убывающая последовательность $M_j^{(n)}$ ограничена снизу, например, числом $m_j^{(1)}$, поэтому (теорема Вейерштрасса) она имеет конечный предел. Аналогично, имеет предел последовательность $m_j^{(n)}$.

Лемма 3 (оценка разности вероятностей перехода). Пусть N таково, что $\delta = \min\limits_{i,j}(P_{ij}^{(N)}) > 0$ (см. лемму 1). Тогда при всех $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)} \leq (1-\delta)^k. \qquad (11)$$

Доказательство. Введем для набора чисел $\{a_j\}$ обозначения: $\sum\limits_j{}^{+} a_j$ — сумма тех a_j, для которых $a_j \geq 0$; аналогично $\sum\limits_j{}^{-} a_j$ — сумма модулей тех a_j, для которых $a_j < 0$. Тогда $\sum = \sum{}^{+} - \sum{}^{-}$.

Пусть α, β — произвольные состояния, s — произвольное натуральное число. По свойствам вероятностей перехода $\sum\limits_{t=1}^{r} P_{\alpha t}^{(s)} = \sum\limits_{t=1}^{r} P_{\beta t}^{(s)} = 1$, откуда $\sum\limits_{t=1}^{r}(P_{\alpha t}^{(s)} - P_{\beta t}^{(s)}) = 0$. С учетом введенных обозначений

$$\sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(s)} - P_{\beta t}^{(s)}) = \sum_{t=1}^{r}{}^{-}(P_{\alpha t}^{(s)} - P_{\beta t}^{(s)}). \qquad (12)$$

При некоторых α и β имеем в силу уравнения Маркова:

$$M_j^{((k+1)N)} - m_j^{((k+1)N)} = P_{\alpha j}^{((k+1)N)} - P_{\beta j}^{((k+1)N)} = \sum_{t=1}^{r}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)})P_{tj}^{(kN)} =$$
$$= \sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)})P_{tj}^{(kN)} - \sum_{t=1}^{r}{}^{-}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)})P_{tj}^{(kN)} \leq$$

(заменяем множитель $P_{tj}^{(kN)}$ в суммах его наибольшим и наименьшим значениями: $M_j^{(kN)}$ и $m_j^{(kN)}$ соответственно)

$$\leq M_j^{(kN)}\sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)}) - m_j^{(kN)}\sum_{t=1}^{r}{}^{-}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)}) \underset{(12)}{=}$$
$$\underset{(12)}{=} (M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)})\sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)}).$$

Итак, при каждом $k \geq 1$:

$$M_j^{((k+1)N)} - m_j^{((k+1)N)} \leq (M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)})\sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)}).$$

Оценим второй множитель правой части, заменяя вычитаемое $P_{\beta t}^{(N)}$ его наименьшим значением. Имеем

$$\sum_{t=1}^{r}{}^{+}(P_{\alpha t}^{(N)} - P_{\beta t}^{(N)}) \leq \sum_{t=1}^{r} P_{\alpha t}^{(N)} - \min_{1 \leq t \leq r} P_{\beta t}^{(N)} \leq 1 - \delta.$$

Значит, при $k \geq 1$

$$M_j^{((k+1)N)} - m_j^{((k+1)N)} \leq (M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)})(1-\delta). \qquad (13)$$

Кроме того

$$M_j^{(N)} - m_j^{(N)} \leq 1-\delta. \qquad (14)$$

Теперь из (13) и (14) последовательно получаем:

$$M_j^{(2N)} - m_j^{(2N)} \leq (M_j^{(N)} - m_j^{(N)})(1-\delta) \leq (1-\delta)(1-\delta) = (1-\delta)^2;$$

$$M_j^{(3N)} - m_j^{(3N)} \leq (1-\delta)^3,$$

и т. д.

Теорема 6 (о существовании финальных вероятностей). Пусть цепь Маркова удовлетворяет трем условиям:

1) число состояний конечно;
2) состояния образуют один эргодический класс;
3) делитель класса $d = 1$.

Тогда для любой пары состояний *i,j* существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \qquad (15)$$

не зависящий от *i*.

Определение. Этот предел π_j называется финальной вероятностью состояния *j*.

Доказательство. Пусть *n* — натуральное число (число шагов), *N* — из леммы 1 (для всех *i,j* $P_{ij}^{(N)} \geq \delta > 0$). Подберем *k* так, чтобы выполнялось $kN \leq n < (k+1)N$; тогда $\frac{n}{N} - 1 < k \leq \frac{n}{N}$. В силу свойств чисел $M_j^{(n)}$, $m_j^{(n)}$ и (11):

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq M_j^{(kN)} - m_j^{(kN)} \leq (1-\delta)^k \leq (1-\delta)^{\frac{n}{N}-1} =$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\left((1-\delta)^{\frac{1}{N}}\right)^n = c\rho^n,$$

где $c = \frac{1}{1-\delta}$, $\rho = (1-\delta)^{\frac{1}{N}} \Rightarrow \rho < 1$, Тогда $\rho^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, так что последовательности $M_j^{(n)}$, $m_j^{(n)}$ имеют общий предел (обозначим его π_j). Тот же предел, в соответствии с принципом сжатой переменной, имеет последовательность $P_{ij}^{(n)}$.

Теорема 7 (о свойствах финальных вероятностей). В условиях предыдущей теоремы финальные вероятности обладают свойствами:

1) $\pi_j \geq 0$; (16)

2) $\sum_{t=1}^{r} \pi_j = 1$; (17)

3) числа $\pi_1, ..., \pi_r$ являются решением системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{r} P_{kj}\pi_k = \pi_j \ \ (i = 1, ..., r); \tag{18}$$

4) равенства (17) и (18) однозначно определяют финальные вероятности.

Замечание. Содержательно $P_{kj}\pi_k$ — вероятность сначала «за бесконечное число шагов» попасть в состояние k, после чего за один шаг попасть в j.

Доказательство. Пусть число состояний равно r. Предел π_j последовательности неотрицательных чисел $P_{ij}^{(n)}$ неотрицателен (предельный переход в неравенстве). Переходя в равенстве $\sum_{j=1}^{r} P_{ij}^{(n)} = 1$ к пределу при $n \to \infty$ и используя (15), приходим к (17). По уравнению Маркова, $P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} P_{kj}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $\pi_j = \sum_{k=1}^{r} \pi_k P_{kj}$. Убедимся, что система уравнений

$$\begin{cases} x_j = \sum_{k=1}^{r} P_{kj} x_k, \ \ j = 1, 2, ..., r; \\ \qquad x_1 + x_2 + ... + x_r = 1 \end{cases} \tag{19}$$

имеет единственное решение $x_j = \pi_j$. Для этого сначала докажем по индукции, что если числа $x_1, ..., x_r$ образуют решение системы (19), то для каждого натурального n:

$$x_j = \sum_{k=1}^{r} P_{kj}^{(n)} x_k, \ j = 1, 2, ..., r. \tag{20}$$

Базу индукции при $n=1$ дают равенства (19), так как $P_{kj}^{(1)}=P_{kj}$. Проведем индукционный переход $n\to n+1$. Пусть $1\le s\le r$. Умножим равенства (19) на P_{js} и просуммируем их по j:

$$\sum_{j=1}^{r}P_{js}x_j=\sum_{j=1}^{r}P_{js}\sum_{k=1}^{r}x_kP_{js}^{(n)} .$$

В силу (19) левая часть последнего равенства есть x_s. Для его правой части, изменяя порядок суммирования, имеем:

$$\sum_{j=1}^{r}P_{js}\sum_{k=1}^{r}x_kP_{js}^{(n)}=\sum_{k=1}^{r}x_k\sum_{j=1}^{r}P_{kj}^{(n)}P_{js}=\sum_{k=1}^{r}x_kP_{ks}^{(n+1)}$$

(последнее — согласно уравнению Маркова). Итак, равенство (20) доказано.

Переходя в нем к пределу при $n\to\infty$, получаем:

$$x_j=\pi_j\sum_{k=1}^{r}x_k=\pi_j\cdot 1=\pi_j .$$

2.7. Асимптотическое поведение $P_{ij}^{(n)}$ — случай $d>1$

Рассмотрим конечную цепь Маркова, состоящую из одного эргодического класса с числом состояний r и общим делителем класса $d>1$. Пусть в обозначениях п. 2.5 $C_1, C_2, ..., C_d$ — разбиение цепи на циклические подклассы, $i\in C_\alpha,\ j\in C_\beta$.

Теорема 8. Для всякого натурального числа t существует предел $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(nd+t)}$; при этом $\pi_j=0$, если t не сравнимо с $(\beta-\alpha)$ по модулю d.

Доказательство. Достаточно рассмотреть в качестве значений t наименьшие неотрицательные вычеты по модулю d: $t=0,1,...,d-1$.

1. Рассмотрим сначала случай $t=0$. Тогда $\alpha=\beta$; $i,j\in C_\alpha$, поскольку при числе шагов, кратном d, система переходит в состояние j того же циклического подкласса, что и i. Пусть номера состояний из C_α — это 1, 2, ..., r (в противном случае состояния можно соответствующим образом перенумеровать). Рассмотрим цепь Маркова с вероятностями перехода $q_{ij}=P_{ij}^{(d)}$ $i,j=1,2,...,r$. Новая цепь, как и исходная, состоит из одного эргодического класса, но уже с делителем d=1, так что к ней применимы результаты п. 2.6, и при этом $q_{ij}^{(n)}=P_{ij}^{(nd)}$ $i,j=1,2,...,r$.

По теореме 6 (сформулированной как раз для случая d=1) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}q_{ij}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(nd)}=\pi_j$.

2. Рассмотрим теперь случай $t\ne 0$. Тогда $i\in C_\alpha,\ j\in C_\beta,\ \alpha\ne\beta$.

– если t не сравнимо с $\beta - \alpha$ по модулю d, то все вероятности перехода $P_{ij}^{(nd+t)} = 0$, так что и $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd+t)} = 0$;

– если $t \equiv (\beta - \alpha)(\operatorname{mod} d)$, то, по уравнению Маркова,

$$P_{ij}^{(nd+t)} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(nd)} P_{kj}^{(t)} =$$

(убираем из суммы заведомо нулевые вероятности $P_{ik}^{(nd)}$ в случае $k \notin C_\alpha$)

$$= \sum_{k \in C_\alpha} P_{ik}^{(nd)} P_{kj}^{(t)} = \sum_{k \in C_\alpha} q_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(t)} \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k \in C_\alpha} \pi_k P_{kj}^{(t)} = \pi_j .$$

2.8. Возвращения

Рассмотрим цепь Маркова со счетным числом состояний 1, 2, ..., i, ... j, ... Пусть i — какое-либо состояние. Обозначим через $f_{ii}^{(n)}$ (n =1, 2, ...) вероятность для системы, выйдя из i, вернуться впервые в i на n-м шаге. Применяя теорему умножения для независимых событий и аксиому сложения для попарно несовместных событий — n-шаговых траекторий вида $i \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_{n-1} \to i$, — можем написать

$$f_{ii}^{(n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1} \neq i} P_{ii_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i}$$

(условие $i_1,\ldots,i_{n-1} \neq i$ означает, что возвращение в i происходит в первый раз).

Определение. Число $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ называется вероятностью возвращения в i.

Будучи значениями вероятностей случайных событий, эти числа удовлетворяют неравенству $f_i \leq 1$.

Определение. Состояние i называется возвратным, если $f_i = 1$; оно называется невозвратным, если $f_i < 1$.

Теорема 9 (критерий возвратности). Для того чтобы состояние i было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} .$$

Замечания

1. Для ряда с неотрицательными слагаемыми расходимость означает, что частичные суммы неограниченно возрастают.

2. Общий член ряда в силу формулы полной вероятности раскладывается в сумму

$$P_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(n)} + f_{ii}^{(n-1)} P_{ii} + \ldots + f_{ii}^{(n-s)} P_{ii}^{(s)} + \ldots + f_{ii}^{(1)} P_{ii}^{(n-1)} . \qquad (21)$$

Определение. Производящей функцией последовательности a_n называется функция комплексного аргумента (сумма степенного ряда)

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n .$$

Если последовательность a_n ограничена, то функция определена (ряд абсолютно сходится) в круге $|z| < 1$. Последовательность a_n однозначно определяет функцию. Обратно, если n раз продифференцировать $a(z)$ (ряд можно дифференцировать почленно) и положить $z = 0$, то получаются формулы для коэффициентов ряда, т. е. восстанавливается последовательность a_n: $a_n = \frac{1}{n!} a^{(n)}(0)$.

Доказательство. Введем производящие функции для последовательностей $f_{ii}^{(n)}$ и $P_{ii}^{(n)}$:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n ; \; P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} z^n .$$

Правая часть равенства (21) — это коэффициент при z^n произведения $F(z)P(z)$, а левая часть — коэффициент при z^n для $P(z)$ ($n > 0$). Поэтому $P(z) - 1 = F(z)P(z) \Rightarrow$

$$P(z) = \frac{1}{1 - F(z)}; \;\; F(z) = \frac{P(z) - 1}{P(z)} . \qquad (*)$$

Воспользуемся теоремой Абеля о степенных рядах: если ряд сходится при $z = R$, то его сумма $g(z)$ непрерывна на отрезке $[0, R]$ (так что $g(R) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$).

Пусть сначала ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ сходится. Тогда для $z \in [0,1]$ в силу равенств (*):

$$\lim_{z \to 1-0} P(z) = P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < +\infty \Rightarrow \lim_{z \to 1-0} \frac{1}{1 - F(z)} < +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - F(1)} < +\infty \Rightarrow F(1) < 1,$$

т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_i < 1$, так что состояние является невозвратным.

Пусть теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ расходится. Рассмотрим степенные ряды $P(z)$ и $F(z)$ на промежутке $(0,1]$ вещественной оси. Зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. В силу стремления частичных сумм расходящегося ряда к $+\infty$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что $\sum_{n=1}^{N} P_{ii}^{(n)} \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Тогда при z, достаточно близких к 1, будет выполняться неравенство $\sum_{n=1}^{N} P_{ii}^{(n)} z^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Для этих z:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} z^n \geq \sum_{n=1}^{N} P_{ii}^{(n)} z^n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{P(z)} \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{z \to 1-0} \frac{1}{P(z)} = \lim_{z \to 1-0} (1 - F(z)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \lim_{z \to 1-0} F(z) = 1 - F(1) = 0 \Rightarrow f_i = F(1) = 1.$$

Следствие. Два сообщающихся состояния одновременно возвратны либо невозвратны.

Доказательство. Пусть состояния i и j сообщаются. Тогда найдутся натуральные числа α и β такие, что $P_{ij}^{(\alpha)} > 0$ и $P_{ji}^{(\beta)} > 0$. Следовательно, одновременно выполняются неравенства

$$P_{ii}^{(n+\alpha+\beta)} \geq P_{ij}^{(\alpha)} P_{jj}^{(n)} P_{ji}^{(\beta)}$$

и

$$P_{jj}^{(n+\alpha+\beta)} \geq P_{ji}^{(\beta)} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(\beta)},$$

так что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ сходятся или расходятся одновременно (поскольку числа $P_{ij}^{(\alpha)}$, $P_{ij}^{(\beta)}$, $P_{ji}^{(\alpha)}$, $P_{ji}^{(\beta)}$ в правых частях обоих неравенств не зависят от индекса суммирования n).

В частности, все состояния одного эргодического класса одновременно возвратны или нет. Таким образом, возвратность — свойство эргодического класса.

2.9. Среднее время возвращения

Свяжем с состоянием j случайную величину ξ_j — число шагов до первого возвращения в j. Тогда $P(\xi_j = n) = f_{jj}^{(n)}$.

Определение. Математическое ожидание $M(\xi_j) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\xi_j = n)$ называется средним временем возвращения в состояние j.

Обозначим это число через μ_j. Если состояние невозвратное, то полагаем по определению $\mu_j = +\infty$.

Отметим без доказательства, что справедлива теорема Колмогорова.

Теорема 10 (теорема Колмогорова — о предельном поведении вероятности возвращения). Пусть цепь Маркова состоит из одного эргодического класса с делителем d Тогда для любого состояния j существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{d}{\mu_j}.$$

Теорема 11. Пусть цепь Маркова с конечным числом состояний состоит из одного эргодического класса с делителем d. Пусть, далее, $\mu_j < +\infty$. Тогда все состояния цепи возвратные, и для любых двух состояний i,j существует предел $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{d}{\mu_j}$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $d = 1$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ при любом фиксированном j, доказываемое равенство имеет вид $\pi_j \mu_j = 1$.

Убедимся в возвратности всех состояний цепи. По лемме 1 при достаточно больших n выполняется неравенство

$$P_{jj}^{(n)} \ge \delta > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty,$$

т. е. состояние j возвратное.

По теореме 6 предел $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ не зависит от i, так что далее можно рассматривать только $P_{jj}^{(n)}$. Используем более краткие обозначения: P_n, вместо $P_{jj}^{(n)}$ и f_n вместо $f_{jj}^{(n)}$ ($n \ge 1$). Положим дополнительно $P_0 = 1$.

Равенство (21) теперь имеет вид

$$P_n = f_n + P_1 f_{n-1} + \ldots + P_{n-1} f_1. \tag{22}$$

Введем последовательность $u_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — остаток ряда. В силу возвратности состояния j имеем: $u_0 = f_1 = 1$.

Далее, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} nf_n = \mu_j$. Поясним подробнее:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots =$$
$$= (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots) + (f_2 + f_3 + f_4 + \ldots) + (f_3 + f_4 + \ldots) + \ldots =$$
$$= f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \ldots \ .$$

Выразим f_n через u_n: $f_n = u_{n-1} - u_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Равенство (22) принимает вид:

$$P_n u_0 = P_0 f_n + P_1 f_{n-1} + \ldots + P_{n-1} f_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n u_0 = (u_{n-1} - u_n)P_0 + (u_{n-2} - u_{n-1})P_1 + \ldots + (u_0 - u_1)P_{n-1} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n u_0 + P_{n-1}u_1 + \ldots + P_0 u_n = P_{n-1}u_0 + P_{n-2}u_1 + \ldots + P_0 u_{n-1}.$$

Обозначая левую часть последнего равенства через A_n, получаем $A_n = A_{n-1}$, т. е. A_n не зависит от *n*. Тогда $A_n = A_0 = P_0 u_0 = 1$. Итак, при любом *n*

$$P_n u_0 + P_{n-1}u_1 + \ldots + P_0 u_n = 1. \qquad (23)$$

В силу условия $\mu_j < +\infty$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится. Поскольку остаток сходящегося ряда стремится к нулю, то для любого ε > 0 существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n < \varepsilon$; при этом $N(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Из (23) при $n > N$ (23):

$$1 \geq P_n u_0 + P_{n-1}u_1 + \ldots + P_{n-N}u_N = 1 - P_{n-N-1}u_{N+1} - \ldots - P_0 u_n \geq$$

(поскольку все вероятности $P_{n-N-1}, P_{n-N-2}, \ldots, P_0$ не превосходят 1)

$$\geq 1 - (u_{N+1} + \ldots + u_n) \geq 1 - \varepsilon.$$

Итак,

$$1 \geq P_n u_0 + P_{n-1}u_1 + \ldots + P_{n-N}u_N \geq 1 - \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем (последовательности $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{n-N}$ имеют общий предел $\pi_j \leq 1$, который можно в сумме вынести за скобки)

$$1 \geq \pi_j (u_0 + \ldots + u_N) \geq 1 - \varepsilon,$$

переходя здесь к пределу уже при $\varepsilon \to 0$, получаем $\pi_j \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$, т. е. $\pi_j \mu_j = 1$.

Глава 3. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

3.1. Основные понятия

Рассмотрим случайные события, происходящие во времени, которое представлено переменной t. Предметом исследования будет вероятность того, что в заданный интервал времени $(0, t)$ произойдет ровно k событий.

Примеры

1. Вызовы телефонной станции (обслуживание звонящих абонентов). Вызовы поступают случайным образом. При проектировании технического оборудования станции необходимо знать для различных значений k и t вероятности того, что за промежуток времени $(0, t)$ поступит k вызовов.

2. Очереди. В некоторой системе обслуживания имеется динамическая (меняющаяся со временем) очередь клиентов. Случайное событие — приход очередного клиента в некоторый момент времени. Исследуется вероятность того, что за промежуток времени $(0, t)$ очередь пополнится k клиентами.

3. Радиоактивный распад. Имеется определенная масса вещества. Случайным событием является распад очередного атома.

Примечательно, что при естественных условиях число наступлений события ведет себя как случайная величина, распределенная по закону Пуассона

$$P\,(k \text{ событий на } (0,\, t)) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Рассмотрим семейство целочисленных неотрицательных случайных величин $X(t)$, зависящих от параметра t > 0. Будем трактовать $X(t)$ как число событий, наступивших в промежуток $(0,t)$. Тогда разность $X(t+\Delta t)-X(t)$ — число событий, наступивших за промежуток времени $(t, t+\Delta t]$.

Определение. Семейство $X(t)$ называется потоком событий.

Определение. Поток событий $X(t)$ называется простейшим, если он удовлетворяет следующим трем требованиям.

Стационарность. Поток событий называется стационарным (или однородным), если для любых моментов времени s, t $(s < t)$ и для любого целого $k \geq 0$ вероятность $P(X(t)-X(s)=k$ зависит только от разности $(t - s)$. Содержательно это означает, что вероятность наступления k событий за промежуток времени длиной t зависит только от длины промежутка, но не зависит от его расположения на числовой оси (по-другому — не зависит от выбора начального момента отсчета времени).

Отсутствие последействия. Поток событий $X(t)$ называется потоком без последействия, если для любых n непересекающихся интервалов $(t_1, t_2), ..., (t_{2n-1}, t_{2n})$ и для любых целых неотрицательных чисел $k_1, ..., k_n$ независимы в совокупности случайные события

$$\left(X(t_2) - X(t_1) = k_1\right), ..., \left(X(t_{2n}) - X(t_{2n-1}) = k_n\right).$$

Содержательно это означает, что вся предшествующая история потока не меняет вероятности событий его будущего.

Ординарность. Будем предполагать, что X(0) = 0, и положим $P_k(t) = P\left(X(t) = k\right)$. Поток событий $X(t)$ называется ординарным, если он удовлетворяет двум условиям:

– существует число λ такое, что $P_1(t) = \lambda t + 0(t)$ при $t \to 0$;

– $\sum\limits_{k=2}^{\infty} P_k(t) = 0(t)$ при $t \to 0$.

Число λ называется параметром потока.

Первое условие означает, что функция $P_1(t)$ дифференцируема, причем $P_1'(t) = \lambda$. Смысл второго — за короткое время маловероятно наступление двух или более событий, т. е. события не могут наступать одновременно.

Итак, простейший поток событий характеризуется свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Определение. События простейшего потока называются вызовами.

Укажем без доказательства, что справедлива следующая теорема.

Теорема 12. Для простейшего потока событий $X(t)$ вероятность поступления *k* вызовов на интервале (0,*t*)

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

т. е. случайная величина $P_k(t)$ при каждом фиксированном *t* распределена по закону Пуассона с параметром λt.

3.2. Интенсивность потока

Пусть случайная величина $X(t)$ описывает случайные вызовы, количество которых распределено по закону Пуассона с параметром λt. В частности, $X(1)$ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ.

Определение. Интенсивностью простейшего потока событий $X(t)$ называется число $M(X(1))$ — математическое ожидание случайной величины $X(t)$ при $t = 1$. Содержательно интенсивность потока выражает среднее число вызовов за единичный промежуток времени $(t, t+1)$.

Поскольку для распределения Пуассона математическое ожидание равно его параметру, то, в силу теоремы 11, для простейшего потока событий $X(t)$ с параметром λ этот параметр есть интенсивность потока.

Действительно, по определению интенсивности, она выражается числом $M(X(1))$, но $X(1)$ имеет распределение Пуассона с параметром λ, так что интенсивность потока равна λ.

3.3. Содержательный смысл и практическое значение простейшего потока событий

1. Стационарность потока выражает независимость вероятностного механизма наступления событий от времени. Для стационарного потока характерна постоянная плотность (среднее число событий в единицу времени).

2. Отсутствие последействия означает, что наступление / ненаступление события в какой-либо момент времени не влияет на наступление / ненаступление в любой другой момент времени. Так, например, поток пассажиров, входящих на станцию метро описываетсяется потоком без последействия, поскольку причины, обусловившие приход каждого отдельного пассажира именно в тот, а не другой момент, как правило, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. При этом для систем массового обслуживания выходной поток (обслуженных и покидающих систему заявок), как правило, имеет последействие, даже если входной поток его не имеет. Возможное последействие выходного потока должно учитываться, если этот поток является входным для какой-либо другой системы массового обслуживания.

3. Условие ординарности означает, что в каждый момент времени наступает не более одного события (в систему массового обслуживания заявки приходят поодиночке). Простейший поток играет среди потоков событий роль, аналогичную роли нормального закона среди других возможных законов распределения случайных величин.

Согласно центральной предельной теореме, при суммировании большого числа независимых случайных величин, подчиненных практически любым законам распределения, получается величина, приближенно распределенная по нормальному закону. Аналогичный результат можно доказать для простейшего потока событий: при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных стационарных потоков с практически любым последействием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему. Достаточные условия для этого аналогичны условиям центральной предельной теоремы: складываемые потоки должны оказывать на сумму приблизительно равномерно малое влияние.

Глава 4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Основные определения

Определение. Случайным процессом (случайной функцией) называется семейство случайных величин $\{X_t\}$, зависящих от параметра t.

В дальнейшем фигурные скобки будем опускать. В практических приложениях в роли t обычно (но необязательно) выступает время. Говорят, что случайная величина X_t задает «состояние системы в момент t».

Определение. Сечением случайного процесса X_t, соответствующим фиксированному значению t_0 параметра t, называется случайная величина X_{t_0}.

Определение. Если множество значений параметра t («моментов времени») счетно или конечно (перенумеровано натуральным рядом или его отрезком), то случайный процесс называется процессом с дискретным временем.

Определение. Случайный процесс X_t называется процессом с непрерывным временем, если параметр t принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка ($t \in [0,T]$ или $t \in [0,\infty)$).

В свою очередь, сечения X_t могут быть дискретными либо непрерывными случайными величинами.

Напомним, что непрерывность случайной величины X_t означает возможность представления ее функции распределения $F_t(x) = P(X_t < x)$ в виде

$$F_t(x) = \int_{-\infty}^{x} p_t(u)du,$$

где интегрируемая неотрицательная функция $p_t(u)$ — плотность распределения случайной величины X_t.

Таким образом, возможны следующие сочетания:

– процессы с дискретным временем и дискретными сечениями;
– процессы с дискретным временем и непрерывными сечениями;
– процессы с непрерывным временем и дискретными сечениями;
– процессы с непрерывным временем и непрерывными сечениями.

Так, например, измерения метеорологических характеристик (температуры T, давления P, влажности V и т. п.) в фиксированные моменты $t_1,...,t_n$ каждых суток приводят к случайным процессам с дискретным временем: $T_{t_i}, P_{t_i}, V_{t_i}$ $(i = 1,...,n)$.

Определение. Случайный процесс X_t называется непрерывным, если выполняются два условия:

– он является процессом с непрерывным временем;

– при каждом t сечение X_t является непрерывной случайной величиной.

Для статистического изучения одного сечения X_{t_0} необходимо многократно реализовать значения этой случайной величины (например, измерить в момент t_0 производительность труда во многих регионах).

Определение. Реализацией (траекторией, выборочной функцией) случайного процесса X_t называется (неслучайная) функция $x(t)$, для которой при любом t: $x(t) = X_t$ — реализованное в данном испытании значение случайной величины X_t.

Для получения реализации $x(t)$ нужно осуществить испытание, в результате которого все случайные величины X_t примут какие-либо значения.

Графики n различных реализаций, т. е. графики функций $x_1(t), ..., x_n(t)$, образуют пучок кривых, который определенным образом характеризует свойства случайного процесса.

Пример. Пусть случайный процесс H_t — высота волны на расстоянии t от мола. Отдельное сечение H_{t_0} характеризуется всеми возможными значениями высоты на фиксированном расстоянии t_0 от мола, а также вероятностями (на практике — относительными частотами) этих значений. Мы «фотографируем» пересечение поверхности моря с вертикальной плоскостью, параллельной линии мола. На разных «снимках» (при разных реализациях) с устойчивыми относительными частотами будут появляться разные значения высоты волны.

В свою очередь, отдельную реализацию этого случайного процесса можно получить как фотографию пересечения водной поверхности вертикальной плоскостью, перпендикулярной линии мола. Для таких прямых будут получаться реализации — графики функции $h(t)$.

Определение. Совокупность функций распределения $F_t(x)$ при всех рассматриваемых t, иными словами, функция двух аргументов

$$F(x,t) = P(X_t < x)$$

называется одномерным законом распределения случайного процесса X_t.

Эта функция не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса, поскольку не отражает взаимовлияние друг на друга различных сечений, хотя и описывает полностью вероятностные свойства каждого отдельного сечения.

Определение: n-мерным законом распределения случайного процесса X_t называется функция 2 n аргументов

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = P(X_{t_1} < x_1;...;X_{t_n} < x_n).$$

4.2. Числовые характеристики случайных процессов

Отдельная случайная величина X характеризуется неслучайными числами: математическим ожиданием $M(X)$, дисперсией $D(X)$ и т. д. Взаимовлияние пары случайных величин X и Y характеризуется корреляционным моментом $\mu(X,Y) = M\{[X - M(X)]\cdot[Y - M(Y)]\}$ и коэффициентом корреляции $r = \dfrac{\mu(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ (здесь σ_X, σ_Y — средние квадратические отклонения).

Аналогично этому, случайный процесс X_t характеризуется неслучайными функциями параметра t, каждое значение которых при $t = t_0$ выражает соответствующую характеристику случайной величины — сечения X_{t_0}. При этом пары взаимовлияющих случайных величин доставляются сечениями X_{t_1}, X_{t_2} для двух различных значений параметра t.

Определение. Математическим ожиданием случайного процесса X_t называется функция $m_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой

$$m_X(t) = M(X_t).$$

Геометрически график функции $m_X(t)$ задает «среднюю кривую», вокруг которой расположены графики отдельных реализаций (рис. 11).

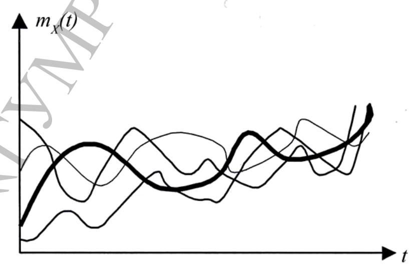

Рис. 11. График функции $m_X(t)$

Определение. Дисперсией случайного процесса X_t называется функция $D_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой

$$D_X(t) = D(X_t).$$

Дисперсия процесса характеризует степень рассеяния графиков возможных реализаций $x(t)$ вокруг средней кривой.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайного процесса $x(t)$ называется функция $\sigma_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}.$$

Из свойств случайных величин вытекают следующие свойства характеристик случайных процессов.

– если $X_t = \varphi(t)$ — неслучайная функция, т. е. для каждого значения t сечение X_t с вероятностью 1 принимает единственное значение $\varphi(t)$, то функция математического ожидания $m_X(t)$ процесса совпадает с самим процессом

$$m_X(t) = \varphi(t);$$

– неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания: если $Y_t = \varphi(t)X_t$, то $M_{Y_t} = \varphi(t)m_X(t)$;

– математическое ожидание суммы процессов равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M_{X+Y}(t) = m_X(t) + m_Y(t);$$

– дисперсия неслучайной функции $X_t = \varphi(t)$ есть функция, тождественно tравная нулю (рассеяние значений отсутствует);

– если $Y_t = \varphi(t)X_t$, где $\varphi(t)$ — неслучайная функция, то

$$D_Y(t) = \left(\varphi(t)\right)^2 D_X(t).$$

В дальнейшем будем всегда предполагать, что рассматриваемые случайные процессы X_t имеют при всех t конечные математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты.

4.3. Корреляционная функция случайного процесса

Пусть задан случайный процесс X_t, а X_{t_1}, X_{t_2} — случайные величины, являющиеся сечениями процесса для произвольно взятых значений параметра t_1 и t_2. Для них можно вычислить корреляционный момент $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Определение. Корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух переменных $K_X(t_1,t_2)$, задаваемая формулой

$$K_X(t_1,t_2) = \mu(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Из свойств корреляционного момента следуют аналогичные свойства корреляционной функции.

Теорема 13. Корреляционная функция является симметрической, т. е. не изменяется при перестановке аргументов

$$K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1).$$

Теорема 14. Если к случайному процессу X_t прибавить неслучайную функцию $\varphi(t)$, то корреляционная функция не изменится.

Доказательство. Пусть $Y_t = X_t + \varphi(t)$. Зафиксируем произвольные значения параметра t_1 и t_2. Тогда по свойствам математического ожидания (в целях наглядности используем скобки разных типов):

$$K_Y(t_1,t_2) = \mu(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = \mu\left(X_{t_1} + \varphi(t_1), X_{t_2} + \varphi(t_2)\right) =$$

$$= M\{[X_{t_1} + \varphi(t_1) - M(X_{t_1} + \varphi(t_1)] \cdot [X_{t_2} + \varphi(t_2) - M(X_{t_2} + \varphi(t_2)]\} =$$

$$= M\{[X_{t_1} + \varphi(t_1) - M(X_{t_1}) - \varphi(t_1)] \cdot [X_{t_2} + \varphi(t_2) - M(X_{t_2}) - \varphi(t_2)]\} =$$

$$= M\{[X_{t_1} - M(X_{t_1})] \cdot [X_{t_2} - M(X_{t_2})]\} = K_X(t_1,t_2)\,.$$

Теорема 15. Пусть X_t — случайный процесс, $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Тогда для случайного процесса $Y_t = \varphi(t)X_t$ имеет место равенство

$$K_Y(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_X(t_1,t_2),$$

т. е. при умножении процесса на неслучайную функцию $\varphi(t)$, корреляционная функция умножается на $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.

Доказательство. По свойствам математического ожидания:

$$K_Y(t_1,t_2) = \mu\left(\varphi(t_1)X_{t_1}, \varphi(t_2)X_{t_2}\right) =$$

$$= M\left\{\left[\varphi(t_1)X_{t_1} - M(\varphi(t_1)X_{t_1}\right] \cdot \left[\varphi(t_2)X_{t_2} - M(\varphi(t_2)X_{t_2}\right]\right\} =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2)M\{[X_{t_1} - M(X_{t_1})] \cdot [X_{t_2} - M(X_{t_2})]\} =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_X(t_1,t_2)\,.$$

Теорема 16. Для корреляционной функции $K_X(t_1,t_2)$ процесса имеет место неравенство

$$\left|K_X(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}\,.$$

Доказательство вытекает из неравенства для коэффициента корреляции сечений X_{t_1}, X_{t_2}.

Теорема 17. Для корреляционной функции $K_X(t_1,t_2)$ случайного процесса при одинаковых значениях аргументов имеет место равенство

$$K_X(t,t) = D_X(t). \tag{24}$$

Доказательство вытекает из определения дисперсии процесса.

Таким образом, задание корреляционной функции случайного процесса определяет и его дисперсию. Поэтому в качестве основных характеристик при описании случайных процессов используются математическое ожидание и корреляционная функция.

Теорема 18. Если случайный процесс Z_t имеет вид

$$Z_t = a(t)A + b(t)B,$$

где $a(t),\ b(t)$ — неслучайные функции, а A, B — случайные величины у которых дисперсии, соответственно, D_A, D_B и корреляционный момент $\mu(A,B)$, то для его корреляционной функции справедлива формула

$$K_Z(t_1,t_2) = a(t_1)a(t_2)D_A + b(t_1)b(t_2)D_B +$$
$$+\left[a(t_1)b(t_2)+a(t_2)b(t_1)\right]\cdot\mu(A,B). \tag{25}$$

Доказательство вытекает из свойств математического ожидания.

Взаимное влияние двух случайных процессов X_t и Y_t описывается взаимной корреляционной функцией

$$K_{X,Y}(t_1,t_2) = M\Big((X_{t_1} - m_X(t_1))\cdot(Y_{t_2} - m_Y(t_2))\Big).$$

4.4. Сходимость в среднеквадратическом

Здесь и далее будут рассматриваться только непрерывные случайные процессы.

Определение. Последовательность случайных величин $X_1,...,X_n,...$, имеющих математические ожидания и дисперсии, сходится в среднеквадратическом (в среднем) к случайной величине X, если числовая последовательность $M\left[(X_n - X)^2\right]$ сходится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} M\left[(X_n - X)^2\right] = 0. \tag{26}$$

В этом случае будем писать $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}} X_n = X$.

Содержательно условие (26) означает, что с ростом *n* значения случайной величины X_n все реже (при большом числе реализаций) существенно отклоняются от реализованных одновременно с ними значений случайной величины *X*.

Аналогично определяется предел в среднеквадратическом при $t \to t_0$ и при $t \to \infty$ для семейства случайных величин X_t, зависящих от непрерывного параметра *t*:

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m.} X_t = X \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} M\left[(X_t - X)^2\right] = 0;$$

$$\underset{t\to +\infty}{l.i.m.} X_t = X \Leftrightarrow \lim_{t\to +\infty} M\left[(X_t - X)^2\right] = 0.$$

Последнее означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |t - t_0| < \delta, \ t \neq t_0, \Rightarrow M\left[(X_t - X)^2\right] < \varepsilon,$$

либо, соответственно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K > 0: \ t > K \ \Rightarrow M\left[(X_t - X)^2\right] < \ \varepsilon.$$

Отметим без доказательства, что допустима перестановка символов математического ожидания случайной величины и предела в среднеквадратическом:

$$M(\underset{t\to t_0}{l.i.m.} X_t) = \lim_{t\to t_0} M(X_t) = \lim_{t\to t_0} m_X(\mathrm{t}) \tag{27}$$

(справа в (27) стоит символ обычного предела функции).

4.5. Дифференцирование случайных процессов

Определение. Производной случайного процесса X_t называется случайный процесс X'_t (или $\dfrac{dX_t}{dt}$), каждое сечение которого есть предел в среднеквадратическом отношения приращения сечения процесса X_t к приращению Δt параметра *t* при $\Delta t \to 0$:

$$X'_t = \underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}. \tag{28}$$

Аналогично определяются частные производные для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Для производной случайного процесса справедливы обычные формулы дифференцирования.

Производная X'_t, будучи случайным процессом, имеет математическое ожидание $m_{X'}(t)$, дисперсию $D_{X'}(t)$ и корреляционную функцию $K_{X'}(t_1,t_2)$.

Теорема 19. Математическое ожидание производной случайного процесса равно производной от математического ожидания исходного процесса

$$m_{X'}(t) = (m_x(t))'. \tag{29}$$

Доказательство. Согласно определению (28),

$$X'_t = \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}.$$

Переставляя с учетом (27) символы математического ожидания и предела в среднем, получаем:

$$m_{X'}(t) = M\left(\underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(X_{t+\Delta t}) - M(X_t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_X(t+\Delta t) - m_X(t)}{\Delta t} = \left(m_X(t)\right)'.$$

Теорема 20. Корреляционная функция производной X'_t случайного процесса X_t равна смешанной частной производной второго порядка от его корреляционной функции

$$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{30}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в случае, когда функция двух переменных является произведением двух функций одной переменной:

$$F(t_1,t_2) = f(t_1) f(t_2),$$

ее смешанная частная производная второго порядка является произведением обычных производных функций одной переменной

$$\frac{\partial^2 F(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = f'(t_1) g'(t_2).$$

Обозначим для случайной величины X_t через $\overline{X}_t$ соответствующую центрированную случайную величину: $\overline{X}_t = X_t - M(X_t)$ (ее математическое ожидание равно нулю). Тогда, с учетом сделанного замечания

$$K_{X_t'}(t_1,t_2) = M(\overline{X}_{t_1}'\overline{X}_{t_2}') = M\left(\frac{\partial^2}{\partial_{t_1}\partial_{t_2}}(\overline{X}_{t_1}\overline{X}_{t_2})\right) \underset{(29)}{=} \frac{\partial^2}{\partial_{t_1}\partial_{t_2}} M\left(\overline{X}_{t_1}\overline{X}_{t_2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(K_X(t_1,t_2)\right).$$

Следствие. Для дисперсии производной случайного процесса справедлива формула:

$$D_{X'}(t) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1=t_2=t}.$$

Это следует из (24) и (30), при $t_1 = t_2 = t$.

Пример. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию производной X_t', если для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = at^2 + bt\,;\ K_X(t_1,t_2) = De^{-\alpha(t_2-t_1)^2}.$$

Отметим, что в данном случае действительно имеет место равенство

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1)\text{ , поскольку } (t_2 - t_1)^2 = (t_1 - t_2)^2.$$

Дифференцируя, получаем:

$$m_{X'}(t) = (m_X(t))' = (at^2 + bt)' = 2at + b;$$

$$\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1} = (De^{-\alpha(t_2-t_1)^2})'_{t_1} = 2D\alpha(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}.$$

Далее,

$$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = (2D\alpha(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)^2})'_{t_2} =$$

$$= 2D\alpha(1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2)e^{-\alpha(t_2-t_1)^2}.$$

4.6. Интегрирование случайных процессов

Конструкция интеграла случайного процесса весьма сходна с конструкцией определенного интеграла функции одной переменной. Пусть X_t — случайный процесс. Разобьем произвольным образом отрезок $[T_1, T_2]$ на n частичных отрезков с длинами Δt_1, ..., Δt_n. В каждом частичном отрезке произвольным образом выберем промежуточную точку t_i $(i = 1,\ldots,n)$. Интегральной суммой, соответствующей данному разбиению и данному выбору промежуточных точек, называется случайная величина

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i X_{t_i}.$$

Как обычно, рангом ρ разбиения назовем максимум длин частичных отрезков.

Определение. Случайная величина I называется пределом в среднеквадратическом интегральных сумм S случайного процесса, X_t по отрезку $[T_1,T_2]$, если $l.i.m.\ S=I$.

Последнее означает: $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \rho<\delta\ \Rightarrow M((S-I)^2)<\varepsilon.$

Определение. Интегралом случайного процесса X_t по отрезку $[T_1,T_2]$ называется случайная величина, равная пределу в среднем интегральной суммы S при условии, что ранг разбиения ρ отрезка $[T_1,T_2]$ стремится к нулю

$$\int_{T_1}^{T_2} X_t dt=\underset{\rho\to 0}{l.i.m.}S.$$

Аналогичным образом определяются кратные и повторные интегралы для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Если в интеграле случайного процесса $\int_{T_1}^{T_2} X_t dt$ зафиксировать нижний предел интегрирования: $T_1=0$, а верхний предел считать переменным: $T_2=t$, то получается семейство случайных величин

$$Y_t=\int_0^t X_\tau d\tau, \tag{31}$$

зависящих от параметра t, т. е. новый случайный процесс.

Определение. Процесс Y_t, задаваемый формулой (31), называется интегралом с переменным верхним пределом от процесса X_t.

Теорема 21. Для математического ожидания $M(Y_t)$ интеграла с переменным верхним пределом (31) справедлива формула

$$m_Y(t)=\int_0^t m_X(\tau)d\tau,$$

или

$$M\left(\int_0^t X_\tau d\tau\right)=\int_0^t M(X_\tau)d\tau$$

(математическое ожидание интеграла равно интегралу от математического ожидания; символы математического ожидания и интеграла перестановочны).

Доказательство. По определению интеграла случайного процесса

$$Y_t = \underset{\rho\to 0}{l.i.m.} \sum \Delta t_i X_{t_i}.$$

По свойствам математического ожидания:

$$M(Y_t) = M(\underset{\rho\to 0}{l.i.m.} \sum \Delta t_i X_{t_i}) = \lim_{\rho\to 0}(M(\sum \Delta t_i X_{t_i})) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}(\sum \Delta t_i M(X_{t_i})) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau.$$

Теорема 22. Пусть для случайного процесса X_t процесс

$$Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau$$

есть интеграл с переменным верхним пределом. Тогда корреляционная функция последнего $K_Y(t_1,t_2)$ представима двойным интегралом от корреляционной функции исходного процесса

$$K_Y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \qquad (32)$$

Доказательство. Пусть $\overline{Y}_t = Y_t - M(Y_t)$. Получим сначала с помощью теоремы 21 представление $\overline{Y}_t$ в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$\overline{Y}_t = Y_t - m_Y(t) = \int_0^t X_\tau d\tau - \int_0^t m_X(\tau)d\tau = \int_0^t (X_\tau - m_X(\tau))d\tau = \int_0^t \overline{X}_\tau d\tau,$$

где $\overline{X}_\tau = X_\tau - m_X(\tau)$.

Представим теперь произведение $\overline{Y}_{\tau_1}\overline{Y}_{\tau_2}$ двойным интегралом:

$$\overline{Y}_{\tau_1}\cdot\overline{Y}_{\tau_2} = \int_0^{t_1}\overline{X}_{\tau_1}d\tau_1 \int_0^{t_2}\overline{X}_{\tau_2}d\tau_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\overline{X}_{\tau_1}\overline{X}_{\tau_2}d\tau_1 d\tau_2.$$

Наконец, переставляя символы математического ожидания и двойного интеграла (аналог теоремы 21), получаем:

$$K_Y(t_1,t_2) = M(\overline{Y}_{t_1},\overline{Y}_{t_2}) = M(\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\overline{X}_{\tau_1}\overline{X}_{\tau_2}d\tau_1 d\tau_2$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} M(\overline{X}_{\tau_1}\overline{X}_{\tau_2})d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Следствие. Для дисперсии интеграла случайного процесса справедлива формула:

$$D_Y(t) = K_Y(t,t) = \int_0^{t}\int_0^{t} K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Это следует из формул (24) и (32) при $t_1 = t_2 = \tau$.

Пример. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла

$$Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau,$$

если для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X = at + b\,;\; K_X(t_1,t_2) = De^{-\alpha|t_1-t_2|}.$$

Отметим, что в данном случае, действительно, имеет место равенство $K_X(t_1,t_2) = K_X(t_2,t_1)$, поскольку $|t_1 - t_2| = |t_2 - t_1|$. Интегрируя, получаем:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau)d\tau = \int_0^t (a\tau + b)d\tau = \frac{at^2}{2} + bt.$$

Учитывая необходимость раскрытия модуля в выражении для $K_X(\tau_1,\tau_2)$ при интегрировании, рассмотрим для $K_Y(t_1,t_2)$ два случая:

1. При $t_1 \le t_2$ (рис. 12):

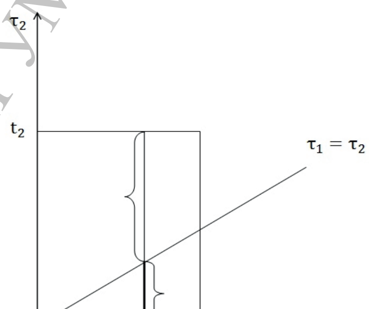

Рис. 12. Разбиение области интегрирования

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}De^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=D\int_0^{t_1}\left(\int_0^{\tau_1}e^{-\alpha(\tau_1-\tau_2)}d\tau_2+\int_{\tau_1}^{t_2}e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}d\tau_2\right)d\tau_1=$$

$$=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha t_1-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha(t_2-t_1)}).$$

2. При $t_2<t_1$ аналогичным образом получаем

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha t_2-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha(t_1-t_2)}).$$

Объединяя оба случая, приходим к выражению

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha\cdot\min(t_1,t_2)-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha|t_1-t_2|}).$$

Отсюда, в частности, можно получить выражение для дисперсии при $t_1=t_2=t$:

$$D_Y(t)=\frac{2D}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t}).$$

4.7. Каноническое представление случайных процессов

Такое представление имеет целью запись случайного процесса в виде суммы случайных процессов простейшего вида.

Определение. Элементарным случайным процессом называется процесс X_t вида

$$X_t=\varphi(t)V, \qquad (33)$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция, а V — случайная величина, не зависящая от параметра t.

Таким образом, случайность элементарного процесса проявляется в множителе V, а зависимость от параметра («времени») обеспечивается неслучайным множителем $\varphi(t)$.

Теорема 23. Для математического ожидания $m_X(t)$ элементарного случайного процесса (33) справедлива формула

$$m_X(t)=\varphi(t)M(V).$$

Доказательство непосредственно вытекает из свойств математического ожидания.

Тогда для центрированной случайной величины $\overline{V}$ (с нулевым математическим ожиданием) соответствующий элементарный процесс $X_t = \varphi(t)\overline{V}$ имеет нулевое математическое ожидание

$$m_X(t) = 0 = \text{const}.$$

Теорема 24. Корреляционная функция элементарного процесса $X_t = \varphi(t)V$ представима в виде

$$K_X(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D(V),$$

где $D(V)$ — дисперсия случайного множителя V.

Доказательство. Пусть $\overline{X_t}$ — центрированная случайная величина, полученная из X_t:

$$\overline{X_t} = \varphi(t)V - M(\varphi(t)V) = \varphi(t)(V - M(V)) = \varphi(t)\overline{V}.$$

Тогда

$$K_X(t_1,t_2) = M(\overline{X_{t_1}}\,\overline{X_{t_2}}) = M\left[\varphi(t_1)\overline{V}\varphi(t_2)\overline{V}\right] = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M(\overline{V}^2) =$$

$$= \varphi(t_1)\varphi(t_2)D(V).$$

Теорема 25. Случайный процесс X_t можно представить в виде суммы его математического ожидания и соответствующего центрированного процесса

$$X_t = m_X(t) + \overline{X}_t. \qquad (34)$$

Доказательство.

$$X_t = M(X_t) + (X_t - M(X_t)) = m_X(t) + \overline{X_t}.$$

Определение. Случайный процесс X_t допускает *к*аноническое представление, если он представим в виде

$$X_t = m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)V_i, \qquad (35)$$

где $m_X(t)$ — математическое ожидание процесса, а $V_1,...,V_n$ — случайные величины, отвечающие двум условиям:

– $V_1,...,V_n$ центрированы: $M(V_i) = 0$;

– $V_1,...,V_n$ не коррелированы: $\mu(V_i,V_j) = 0$ при $i \neq j$.

Неслучайные функции $\varphi(t_1),...,\varphi(t_n)$ называются координатными функциями процесса X_t.

Теорема 26. Если случайный процесс X_t допускает каноническое представление (35), то для его корреляционной функции справедлива формула

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)D(V_i). \qquad (36)$$

Доказательство. По определению корреляционной функции:

$$K_X(t_1,t_2)=M(\overline{X}_{t_1}\overline{X}_{t_2})=M\left[\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)V_iV_j\right]=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)M(V_iV_j).$$

В силу некоррелированности:

$$M(V_iV_j)=\begin{cases}0, \text{ при } i\neq j;\\ \mathrm{D}(V_i), \text{ при } i=j.\end{cases}$$

Тогда

$$K_X(t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)D(V_i).$$

Определение. Представление корреляционной функции в виде (36) называется ее каноническим представлением.

Итак, возможность представления случайного процесса в каноническом виде (35) влечет за собой возможность представления его корреляционной функции в каноническом виде (36).

Следствие. Для дисперсии случайного процесса, представимого в каноническом виде (35), в силу формулы (36) имеем:

$$D_X(t)=K_X(t,t)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(t))^2D(\mathrm{V}_i)\,. \qquad (37)$$

4.8. Стационарные случайные процессы

Определение. Случайный процесс X_t называется стационарным в узком смысле, если все его многомерные распределения

$$F(t_1,...,t_n;x_1,...,x_n)\overset{Def}{=}P(X_{t_1}<x_1,...,X_{t_1}<x_1)$$

зависят только от взаимного расположения $t_1,...,t_n$ на числовой оси, т. е. от разностей (t_i-t_j), но не от самих значений $t_1,...,t_n$:

$$F(t_1,...,t_n;x_1,...,x_n)=F(t_1+s,...,t_n+s;x_1,...,x_n).$$

Определение. Случайный процесс X_t называется стационарным в широком смысле, если он удовлетворяет двум условиям:

– математическое ожидание процесса постоянно при всех значениях параметра t: $m_X(t)=m_X=\text{const}$;

– корреляционная функция процесса зависит только от разности аргументов

$$K_X(t_1,t_2) = K_X(\tau_1,\tau_2)\text{, если } t_2 - t_1 = \tau_2 - \tau_1 .$$

Содержательно стационарность процесса означает, что процесс протекает «во времени» однородно, его описание не зависит от выбора начала отсчета параметра *t*.

Замечание. Из стационарности процесса в узком смысле следует его стационарность в широком смысле. В дальнейшем в качестве стационарных будем понимать процессы, стационарные в широком смысле.

Для стационарного процесса X_t положим $\tau = t_2 - t_1$ и введем корреляционную функцию $k_X(\tau)$ одного аргумента τ:

$$k_X(\tau) = K_X(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_1+\tau). \quad (38)$$

Теорема 27. Если процесс X_t является стационарным, то его дисперсия (функция параметра *t*) является постоянной величиной

$$D_X(t) = k_X(0) = \text{const} .$$

Доказательство:

$$D_X(t) = M\left\{\left[X_t - M(X_t)\right]^2\right\} = M\left\{\left[X_t - M(X_t)\right]\cdot\left[X_t - M(X_t)\right]\right\} = K_X(t,t).$$

Применяя к $K_X(t,t)$ формулу (38), получаем:

$$D_X(t) = K_X(t,t) = k_X(t-t) = k(0).$$

Свойства корреляционной функции
стационарного случайного процесса

Теорема 28. Если X_t — стационарный случайный процесс, то его корреляционная функция $k_X(\tau)$ является четной

$$k_X(-\tau) = k_X(\tau) .$$

Доказательство. Пусть $K_X(t_1,t_2) = k_X(t_2-t_1) = k_X(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Тогда в силу симметричности корреляционной функции (теорема 13):

$$k_X(-\tau) = k_X(t_1-t_2) = K_X(t_2,t_1) = K_X(t_1,t_2) = k_X(\tau).$$

Теорема 29. Если X_t — стационарный случайный процесс, то при любом τ справедлива оценка

$$|k_X(\tau)| \le k_X(0). \tag{39}$$

Доказательство. По теореме 16

$$K_X(t_1,t_2) \le \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}. \tag{*}$$

Поскольку процесс является стационарным, то

$$K_X(t_1,t_2) = k_X(\tau)\ ,\ \ \tau = t_2 - t_1\ ; \tag{**}$$

$$D_X(t_1) = D_X(t_2) = k_X(0)\ . \tag{***}$$

Тогда неравенство (*) принимает вид

$$k_X(\tau) \le \sqrt{k_X(0)k_X(0)} = k_X(0)\ .$$

Теорема 30. Если X_t — дифференцируемый стационарный случайный процесс, то для корреляционной функции его производной $k_{X'}(\tau)$ справедлива формула

$$k_{X'}(\tau) = -\frac{d^2 k_X(\tau)}{d\tau^2}. \tag{40}$$

Доказательство. По теореме 20

$$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

В силу стационарности процесса $K_X(t_1,t_2) = k_X(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Таким образом, функцию двух переменных $K_X(t_1,t_2) = k_X(\tau)$ можно рассматривать как сложную функцию с промежуточной переменной $\tau = t_2 - t_1$. При этом

$$\frac{\partial\tau}{\partial t_1} = -1\ ;\ \frac{\partial\tau}{\partial t_2} = 1\ .$$

Применяя формулу для производной сложной функции, получаем:

$$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 k_X(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial k_X(\tau)}{\partial t_1}\right) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{dk_X(\tau)}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_1}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{dk_X(\tau)}{d\tau}\right) = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dk_X(\tau)}{d\tau}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t_2} = -\frac{d^2 k_X(\tau)}{d\tau^2}\ .$$

4.9. Эргодическое свойство стационарных случайных процессов

Статистическая оценка математического ожидания $m_X(t)$ случайного процесса X_t предполагает при заданном значении параметра t многократную реализацию сечения X_t и последующее осреднение полученных значений (вычисление среднего арифметического).

В случае стационарного случайного процесса математическое ожидание постоянно: $m_X(t) = m_X = \text{const}$, однако по-прежнему статистическая оценка для m_X связана с многократной реализацией пусть любого, но какого-либо одного сечения X_{t_0} (с фиксированным t_0). Говорят, что осреднение проводится на множестве реализаций.

Если зависимость между различными сечениями стационарного случайного процесса быстро убывает, то для достаточно «далеких» друг от друга сечений X_t и $X_{t+\Delta t}$ (Δt велико) можно считать эти сечения независимыми случайными величинами. Тогда при оценке m_X можно попытаться заменить совокупность реализаций m_X фиксированного сечения X_{t_0} совокупностью однократных реализаций далеких друг от друга сечений: $\left\{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots\right\}$.

Иными словами, речь идет о возможности заменить многократную реализацию одного сечения однократной реализацией случайного процесса в целом на достаточно большом промежутке изменения параметра (т. е. за большой промежуток «времени»). Этот последний способ называют осреднением по времени.

Например, замена осреднения по реализациям на осреднение по времени заведомо допустима, если случайный процесс фактически не зависит от параметра: $X_t = X$, т. е. при разных t реализуется одна и таже случайная величина X.

Осреднение по времени для математического ожидания означает использование формулы

$$\tilde{m}_X = \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt = \tilde{m}_X(T). \tag{41}$$

При разных значениях T получаются, вообще говоря, различные $\tilde{m}_X(T)$, т. е. мы имеем дело с совокупностью случайных величин, для которой имеет смысл предел в среднеквадратическом при $T \to +\infty$.

Осреднение по времени для корреляционной функции означает использование формулы

$$\tilde{k}_X(\tau,T) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}(X_t - m_X)(X_{t+\tau} - m_X)dt \qquad (42)$$

(интегрирование ведется по отрезку $[0, T-\tau]$, чтобы обеспечить попадание аргумента ($t+\tau$) в отрезок $[0,T]$).

Определение. Стационарный случайный процесс X_t обладает эргодическим свойством, если имеет место сходимость в среднеквадратическом

$$\underset{T\to+\infty}{l.i.m.}\, \tilde{m}_X(T) = m_X, \qquad (43)$$

или подробнее

$$\underset{T\to+\infty}{l.i.m.}\, \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt = m_X.$$

Таким образом, стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством, если оценка его математического ожидания $\tilde{m}_X(T)$, полученная осреднением по времени от 0 до T, может быть приближена к математическому ожиданию m_X, осредненному по реализациям, за счет увеличения T.

Приведем без доказательства критерий эргодичности стационарного случайного процесса.

Теорема 31. Для эргодичности стационарного случайного процесса X_t необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \left(1-\frac{\tau}{T}\right)k_X(\tau)d\tau = 0.$$

Достаточное условие эргодичности стационарного случайного процесса в терминах корреляционной функции дает теорема 32.

Теорема 32. Если корреляционная функция $k_X(\tau)$ стационарного случайного процесса удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\to+\infty} k_X(\tau) = 0, \qquad (44)$$

то процесс обладает эргодическим свойством.

Определение. Стационарный случайный процесс X_t обладает эргодическим свойством по отношению к корреляционной функции, если при любом фиксированном значении аргумента τ_0 имеет место сходимость в среднеквадратическом

$$\underset{T\to+\infty}{l.i.m.}\, \frac{1}{T}\int_0^T (X_{\tau_0} - m_X)(X_{\tau_0+t} - m_X)dt = k_X(\tau_0).$$

Соотношение (44) является достаточным условием эргодичности также и по отношению к корреляционной функции.

Пример. Пусть случайный процесс имеет вид

$$X_t = A\sin t + B\cos t,$$

где A и B — случайные величины с характеристиками:

$$M(A) = M(B) = 0\ ;\ D(A) = D(B) = \sigma^2\ ;\ \mu(A,B) = 0.$$

Тогда $m_X(t) = 0 = \text{const}$. Для корреляционной функции, используя формулу (25), получаем:

$$K_X(t_1, t_2) = \sigma^2(\sin t_1 \sin t_2 + \cos t_1 \cos t_2) =$$

$$= \sigma^2 \cos(t_1 - t_2) = \sigma^2 \cos\tau\ ;\ \tau = t_1 - t_2.$$

Таким образом, процесс является стационарным (его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов). Проверим достаточное условие эргодичности:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{t}{T})k_X(t)dt = \sigma^2 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{t}{T})\cos t dt =$$

$$= \sigma^2 \lim_{T\to+\infty} \frac{1-\cos T}{T^2} = 0.$$

Итак, процесс является эргодическим (относительно математического ожидания). В то же время функция $k_X(\tau) = \sigma^2\cos\tau$ не имеет предела при $\tau \to \infty$, что оставляет открытым вопрос об эргодичности относительно корреляционной функции.

4.10. Представление случайного процесса рядом Фурье

Числовой ряд и ряд Фурье

Напомним основные понятия, связанные с числовым рядом и рядом Фурье функции. Если задана числовая последовательность x_n, то числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$$

Частичной суммой ряда S_n называется сумма первых его n членов

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n .$$

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; число S в этом случае называется суммой ряда. Если конечного предела не существует, то ряд называется расходящимся.

Рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ длины $T = b - a$ называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x),$$

где коэффициенты a_n, b_n задаются известными формулами [15].

При естественных ограничениях на функцию $f(x)$ она является суммой своего ряда Фурье (раскладывается в ряд Фурье).

Разложение случайного процесса в ряд

Одним из основных методов исследования (неслучайных) функций является их представление рядами Фурье, т. е. гармонический анализ. Аналогичный метод используется при исследовании случайных процессов.

Пусть $X_t^{(1)},...,X_t^{(i)},...$ — последовательность случайных процессов-слагаемых, которой соответствует последовательность частичных сумм

$$S_t^{(n)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + ... + X_t^{(n)}.$$

Определение. Рядом для последовательности случайных процессов $X_t^{(i)}$ называется выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_t^{(i)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + ... + X_t^{(i)} + ... \ , \qquad (45)$$

имеющее смысл суммы бесконечного числа слагаемых-случайных процессов.

Определение. Ряд (45) сходится к случайному процессу X_t, если при каждом значении параметра t имеет место сходимость в среднеквадратическом последовательности частичных сумм

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.} S_t^{(n)} = X_t.$$

Говорят также, что процесс X_t раскладывается в ряд (45).

Ряд Фурье для случайных процессов

Будем предполагать случайный процесс X_t центрированным — в противном случае можно перейти к центрированному случайному процессу

$$\overline{X}_t = X_t - m_X(t).$$

Определение. Процесс X_t на промежутке $[0, T]$ раскладывается в ряд Фурье, если

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t) + V_n \sin(\omega_n t), \tag{46}$$

где $\omega_n = \dfrac{2n\pi}{T}$, U_n и V_n — случайные величины (не зависящие от параметра t).

Разложение (46) является обобщением канонического представления (35) на случай бесконечного числа слагаемых. Наложим на случайные величины U_n, V_n, как и в случае канонического представления, требования:

– некоррелированность

$$\mu(U_i, V_j) = \mu(U_i, U_j) = \mu(V_i, V_j) = 0 \text{ при } i \neq j; \tag{47}$$

– центрированность

$$M(U_i) = M(V_j) = 0 \quad (i = 1, 2...); \tag{48}$$

– попарное равенство дисперсий

$$D(U_i) = D(V_i) = D_i \quad (i = 1, 2...). \tag{49}$$

Определение. Представление стационарного случайного процесса X_t рядом Фурье (46) с указанными свойствами (47) – (49) называется его спектральным разложением. При этом случайные величины U_n, V_n называются амплитудами, а множители ω_n в аргументах синусов и косинусов (гармоник) — частотами.

Действительно, учитывая, что при реализации процесса гармоники колеблются в пределах от –1 до 1, возможные крайние значения отдельных слагаемых (т. е. их амплитуды) определяются реализованными значениями U_n, V_n. В свою очередь, частота колебания отдельной гармоники определяется множителем ω_n.

Определение. Дискретным спектром случайного процесса X_t, разложенного в ряд Фурье (46), называется распределение дисперсий D_n случайных амплитуд по частотам ω_n.

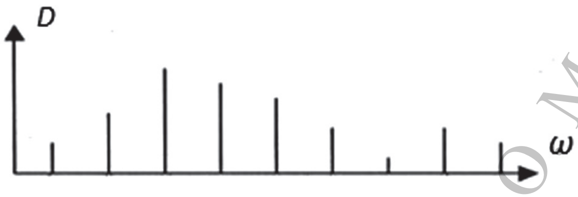

Рис. 13. Дискретный спектр

Дискретный спектр удобно представлять графически, откладывая по оси абсцисс значения частот, а по оси ординат — соответствующие им дисперсии (рис. 13).

Важную роль в спектральном анализе стационарных случайных процессов играет связь между спектральным разложением (46) самого процесса и разложением его корреляционной функции в «обычный» (неслучайный) ряд Фурье по косинусам с теми же частотами. Именно, справедлива теорема 33.

Теорема 33. Если стационарный случайный процесс X_t имеет спектральное разложение (46) – (49), то для его корреляционной функции $k_X(\tau)$ имеет место разложение

$$k_X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\omega_n \tau). \tag{50}$$

Следствие. При $\tau = 0$ из разложения (50) следует

$$D_X = k_X(0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = 0$ (общий член сходящегося ряда стремится к нулю).

Справедлива и обратная теорема 34.

Теорема 34. Если корреляционная функция стационарного случайного процесса имеет разложение (50), то сам процесс имеет спектральное разложение (46).

4.11. Стационарные процессы с непрерывным спектром

В спектральном разложении (46), (50) частоты ω_n пробегают дискретное множество возрастающих значений, перенумерованных натуральными числами n. Если, обобщая это разложение, предположить, что частоты ω могут принимать все положительные значения, заполняя сплошь положительную полуось, то от рядов (46), (50) естественно перейти к несобственным интегралам.

Определение. Спектральной плотностью $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса X_t называется преобразование Фурье корреляционной функции

$$S_X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (51)$$

По формуле Эйлера $e^{-i\omega\tau}=\cos(\omega\tau)-i\cdot\sin(\omega\tau)$, так что

$$S_X(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[k_X(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau-i\cdot k_X(\tau)\sin(\omega\tau)\right]d\tau,$$

причем ввиду нечетности функции $k_X(\tau)\sin(\omega\tau)$ (из-за четности первого множителя и нечетности второго) мнимая часть выражения справа равна нулю. Поскольку $k_X(\tau)\cos(\omega\tau)$ — четная функция аргумента ω при фиксированном τ, то $S_X(\omega)=S_X(-\omega)$. Итак, спектральная плотность стационарного процесса принимает только вещественные значения; ее график симметричен относительно оси ординат.

Обратное преобразование Фурье дает выражение корреляционной функции через спектральную плотность:

$$k_X(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}S_X(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega. \qquad (52)$$

При $\tau = 0$ ($\Rightarrow\cos(\omega\tau)\equiv 0$) получаем выражение дисперсии процесса через его спектральную плотность

$$D_X=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega \qquad (53)$$

(отметим, что нет единообразия в множителях перед знаком интеграла в формулах для преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье, поэтому в разных руководствах формулы для $k_X(\tau)$ и $S_X(\omega)$ могут несколько отличаться).

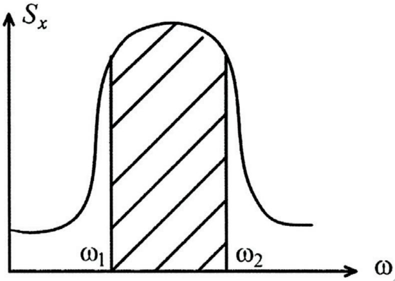

Рис. 14. График спектральной плотности

Из (53) усматривается механический смысл спектральной плотности: в итоговое значение дисперсии наибольший вклад вносят диапазоны частот $[\omega_1, \omega_2]$ с наибольшими значениями $S_X(\omega)$ (рис. 14).

Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Цепь Маркова как случайный процесс

Номера 1, 2, ..., *i*, ... состояний цепи Маркова $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_i^{(n)}, ...$ для момента *n* могут рассматриваться как возможные значения случайной величины X_n. Таким образом, цепь Маркова как последовательность испытаний $И_n$ с исходами $A_i^{(n)}$ можно считать случайным процессом с дискретным временем и дискретными сечениями (состояниями). Определяющее условие (1) цепи Маркова

$$P(A_i^{(n)} / A_{i_1}^{(n_1)} A_{i_2}^{(n_2)} ... A_{i_l}^{(n_l)}) = P(A_i^{(n)} / A_{i_1}^{(n_1)}),$$

$$n > n_1 > n_2 > ... > n_l,$$

теперь получает запись:

$$P(X_n = i / X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, ..., X_{n_l} = i_l) = P(X_n = i / X_{n_1} = i_1).$$

Переходные вероятности ${}_nP_{ij} = P(A_j^{(n)} / A_i^{(n-1)})$ записываются как $P(X_n = j / X_{n_1} = i)$. Условие однородности цепи означает независимость от *n* этих условных вероятностей.

5.2. Марковские случайные процессы

Определение. Случайный процесс X_t называется марковским, если для любых моментов времени $t > t_1 > t_2 > ... > t_l$

$$P(X_t = i / X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, ..., X_{t_l} = i_l) = P(X_t = i / X_{t_1} = i_1).$$

Марковский процесс является математической моделью динамики «системы без памяти», будущая динамика которой вероятностно зависит только от текущего состояния и не зависит от «предыстории». Примером марковского процесса может служить броуновское движение макроскопической (но мелкой) частицы в жидкой среде, когда движение частицы в каждый момент определяется хаотическими столкновениями с огромным количеством молекул среды. Случайной величиной X_t (сечением, состоянием) здесь служит какая-либо координата частицы в момент *t*.

Цепь Маркова теперь может быть охарактеризована как марковский случайный процесс с дискретным временем и дискретными состояниями.

Определение. Переходной функцией марковского случайного процесса называется функция четырех переменных

$$p(s,x,t,y) = P(X_t = y / X_s = x),$$

здесь s, t — допустимые значения параметра (времени); x, y — любые вещественные числа.

Введем случайные события $A = (X_{t_1} = x_1)$ и $B = (X_{t_2} = x_2)$. По теореме умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(X_{t_1} = x_1)\, p(t_2, x_2, t_1, x_1).$$

Для переходной функции справедлива формула

$$p(s,x,s,y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Это означает, что система, моделируемая данным процессом, не может одновременно находиться в двух разных состояниях.

Уравнение Маркова – Чепмена – Колмогорова применительно к марковскому случайному процессу с не более чем счетным множеством состояний E имеет вид

$$p(s,x,t,y) = \sum_{u \in E} p(s,x,u,z)\, p(u,z,t,y)$$

для любых x, y и для любых S, t, u, отвечающих условию $s \leq u \leq t$.

5.3. Пуассоновские случайные процессы

Определение. Пуассоновский случайный процесс — это марковский процесс с непрерывным временем X_t, отдельные сечения которого принимают целые неотрицательные значения n и удовлетворяют (независимо от n) условию

$$f(h) \overset{Def}{=} P\big((X_{t+h} - X_t = 1) / X_t = n\big) = \lambda h + \mathrm{o}(h),$$

где $\mathrm{o}(h)$ является при $h \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем h.

В этом случае правосторонняя производная функции f равна интенсивности потока $f'(h) = \lambda$.

5.4. Случайные процессы с независимыми приращениями

Определение. Случайный процесс X_t $(t \geq 0)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого натурального n

и для любых $t_0, t_1, ..., t_n$ таких, что $0 \le t_0 \le t_1 \le ... \le t_n$, разности сечений (их называют приращениями) $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ — независимые случайные величины.

Для приращений справедливо матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ ... \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0... & 0 \\ 1 & 1 & 0... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ ... \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Случайный процесс с независимыми приращениями может быть определен и для дискретного параметра $t \in \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$; в этом случае он сводится к последовательности независимых случайных величин

$$Z_0 = X_0,\ Z_1 = X_1 - X_0,\ Z_i = X_i - X_{i-1}, ...$$

в том смысле, что через распределения $Z_0, Z_1, ..., Z_n$ восстанавливаются совместные распределения любого конечного набора сечений, поскольку $X_i = Z_0 + Z_1 + ... + Z_i$, $i = 0, 1, 2, ...$, что равносильно вышеприведенному матричному уравнению.

5.5. Мартингалы

Мартингал — это случайный процесс, наилучшим предсказанием поведения которого в будущем является его настоящее состояние.

Определение. Случайный процесс X_t называется мартингалом, если для любых значений параметра $0 \le t_0 \le t_1 \le ... \le t_n$ для математического ожидания выполняется следующее условие $M(X_{t_{n+1}} / X_{t_1} = a_1, ..., X_{t_n} = a_n) = M(X_{t_{n+1}} / X_{t_n} = a_n)$ при любом допустимом наборе значений $a_1, ..., a_n$.

В экономической интерпретации мартингалы служат математическими моделями «безобидных» в следующем смысле игр: если X_t — капитал игрока в момент t, то среднее значение его капитала в момент t_{n+1} зависит только от его капитала в предшествующий момент t_n независимо от предыстории в моменты $t_{n-1}, ..., t_1$.

Так, например, если независимые случайные величины $Z_1, ..., Z_n, ...$ центрированы ($M(Z_i) = 0$), то случайный процесс $X_n = Z_1 + ... + Z_n$ является мартингалом.

5.6. Случайные процессы чистого рождения

Пуассоновский процесс естественным образом обобщается на ситуацию, когда вероятность наступления очередного события в момент t зависит от количества событий, которые уже наступили в предшествующие моменты времени.

Определение. Марковский случайный процесс X_t называется процессом чистого рождения, если для любого набора положительных чисел $\lambda_1,...,\lambda_k,...$ выполняются условия:

$$P(X_{t+h}-X_t=1/X_t=k)=\lambda_k h+o_1(h) \text{ при } h\to 0+0;$$

$$P(X_{t+h}-X_t=0/X_t=k)=1-\lambda_k h+o_2(h) \text{ при } h\to 0+0;$$

$$P(X_{t+h}-X_t<0/X_t=k)=0.$$

Такой математической моделью описывается, например, рост размера популяции живых организмов в благоприятных условиях. Здесь X_t — число рождений в интервале времени $(0, t)$.

5.7. Случайные процессы рождения и гибели

Обобщая понятие случайного процесса чистого рождения, можно допустить, что значения X_t могут как возрастать (при рождении очередной особи, починке вышедшего из строй механизма и т. п.), так и убывать (при гибели особи, поломке механизма). Таким образом, если система в момент t находилась в состоянии n (n — размер популяции, размер работоспособного парка механизмов), то через случайный промежуток времени она может оказаться как в состоянии $n + 1$, так и в состоянии $n - 1$.

Пусть X_t — марковский процесс с непрерывным временем; значения любого сечения — неотрицательные целые числа 1, 2, ... — возможные состояния системы в момент t. Вероятности переходов стационарны $P(X_{t+s}=j/X_s=i)=P_{ij}(t)$ независимо от расположения момента S на оси времени.

На процесс рождения и гибели накладываются следующие дополнительные условия:

$$P_{i,i+1}(h)=\lambda_i h+o_{i,i+1}(h) \text{ при } h\to 0+0,\ i\ge 0;$$

$$P_{i,i-1}(h)=\mu_i h+o_{i,i-1}(h) \text{ при } h\to 0+0,\ i\ge 1;$$

$$P_{i,i}(h) = 1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h) \text{ при } h \to 0+0,\ i \geq 0.$$

Таким образом, для малого промежутка времени h состояние системы может либо не измениться, либо уменьшиться или увеличиться на единицу — произойдет единичный акт рождения или гибели. Вероятность такого акта пропорциональна длине промежутка. При этом оказывается, что

$$P'_{i,i+1}(h) = \lambda_{i,i+1};\ P'_{i,i-1}(h) = \mu_{i,i-1};\ P'_{i,i}(h) = 1 - \lambda_{i,i+1} - \mu_{i,i-1},$$

т. е. правосторонние производные процесса равны соответствующим интенсивностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Наука, 1991. — 383 с.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей: учебник / Е. С. Вентцель. — М.: Высш. шк., 2001. — 575 с.
3. *Гихман И. И.* Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.
4. *Гнеденко Б. В.* Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. — М.: УРСС, 2003. — 205 с.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М.: УРСС, 2001. — 318 с.
6. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. — М.: Высш. шк., 2002. — 478 с.
7. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
8. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1997. — 416 с.
9. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / С. Карлин. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
10. *Коваленко И. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. — М.: Высш. шк., 1982. — 256 с.
11. *Казакевич Д. И.* Основы теории случайных процессов и ее применения в гидрометеорологии / Д. И. Казакевич. — Л.: Гидромет, 1971. — 267 с.
12. *Пугачёв В. С.* Теория случайных функций / В. С. Пугачёв. — М.: Физматгиз,1960. — 883 с.
13. *Шкадова А. Р.* Теория вероятностей / А. Р. Шкадова, А. П. Нырков. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 2003. — 198 с.
14. *Ястребов М. Ю.* Схема равновозможных исходов / М. Ю. Ястребов. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 1994. — 13 с.
15. *Ястребов М. Ю.* Математика. Неопределенный и определенный интегралы / М. Ю. Ястребов. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 2004. — 55 с.

16. *Ястребов М. Ю.* Теория вероятностей / М. Ю. Ястребов. — СПб.: Изд-во ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова, 2018. — 96 с.
17. *Ястребов М. Ю.* Основы теории чисел / М. Ю. Ястребов, А. П. Нырков. — СПб.: Изд-во ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова, 2013. — 75 с.
18. *Ястребов М. Ю.* Математика. Числовые и функциональные ряды / М. Ю. Ястребов. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 2007. — 48 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ястребов Михаил Юрьевич, канд. эконом. наук, доц.
Ланева Ирина Владимировна, канд. эконом. наук, доц.

Представление данных и алгоритмы их обработки

Учебное пособие

Издательство
ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова

198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2
Тел.: (812) 748-97-19, 748-97-23
e-mail: izdat@gumrf.ru

Ответственный за выпуск *М. В. Беглецова*
Редактор *Т. В. Середова*
Оригинал-макет *Т. Н. Степанова*

Подписано в печать 10.06.2019
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 5. Тираж 100 экз. Заказ № 40/19