Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА имени адмирала С. О. МАКАРОВА

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА
Кафедра комплексного обеспечения информационной безопасности

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОМЕХ В КАНАЛАХ СВЯЗИ

Лабораторный практикум

Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова
2019

УДК 517.5:551.48
ББК 22.171
М33

Рецензенты:

Молдовян Н. А., д-р техн. наук, проф.
Кузнецов В. О., канд. физ.-мат. наук, доц.

М33 **Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи** : лабораторный практикум / Сост. : М. Ю. Ястребов, И. В. Ланева, В. В. Коротков. — СПб. : Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2019. — 44 с.

Предназначено для студентов направления 090900.62 «Информационная безопасность», специальности 090303.65 «Информационная безопасность автоматизированных систем» и для углубленного изучения магистрам по направлению 090900.68 «Информационная безопасность».

Содержание соответствует рабочей программе дисциплины направления 090900.62 «Информационная безопасность».

Рассмотрено и рекомендовано на заседании кафедры комплексного обеспечения информационной безопасности. Протокол № 10 от 14 июня 2019 года.

УДК 517.5:551.48
ББК 22.171

СОДЕРЖАНИЕ

Человеческому разуму трудно моделировать случай

Эмиль Борель

Случайные (стохастические) помехи в каналах связи рассматриваются при их анализе как распределенные во времени случайные события, то есть как случайные процессы. В теории вероятностей с помощью понятия случайного процесса формализуется представление о случайной величине, вероятностные свойства которой (функция распределения и выражаемые через нее характеристики) меняются со временем. Таким образом, в каждый момент времени мы имеем дело с новой случайной величиной.

Лабораторная работа № 1
МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАНДАРТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретические сведения

1. Моделирование равномерного распределения на [0,1]

В основу моделирования случайных величин, имеющих одно из стандартных распределений (т.е. для получения псевдослучайных чисел), можно положить генерирование значений случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0,1]. К настоящему времени разработано много алгоритмов такого генерирования.

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin [a, b]; \\ c, \text{ если } x \in [a, b]. \end{cases} \qquad (1)$$

График $p(x)$ изображен на рис. 1.

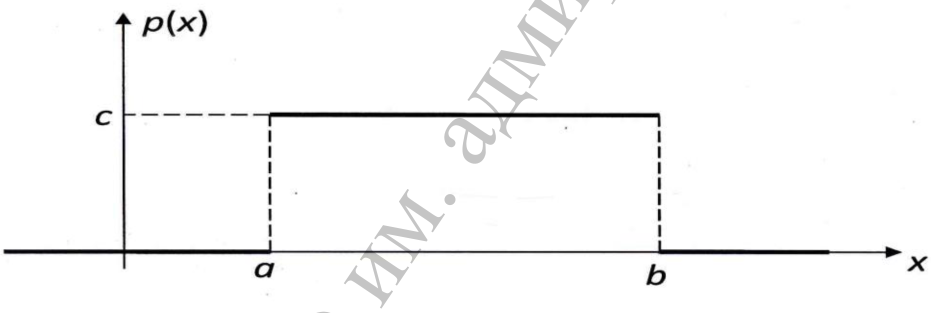


Рис. 1.

Параметры X:

$$c = \frac{1}{b-a}; \quad M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

здесь $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a,b]$; $(b-a)$ — длина отрезка $[a,b]$.

Если x — сгенерированное значение равномерного распределения на отрезке $[0,1]$, то соответствующее значение для отрезка $[a,b]$ — это $(b-a)x+a$.

Метод середины квадрата. Последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на [0,1], строится рекуррентно:

1) произвольным образом выбирается рациональное число $x_0 \in (0,1)$ — десятичная дробь с фиксированным четным количеством $2k$ знаков после запятой;

2) для получения очередного псевдослучайного числа x_{i+1} предыдущее x_i возводится в квадрат;

3) в качестве дробной части числа x_{i+1} берутся средние цифры дробной части числа x_i^2 — с $(k+1)$-й по $3k$-ю.

Пример. Пусть $x_0 = 0.2061$. Последовательно получаем

$x_0^2 = 0.04247721$; $x_1 = 0.2477$;

$x_1^2 = 0.06135529$; $x_2 = 0.1355$;

$x_2^2 = 0.01836025$; $x_3 = 0.8360$;

$x_3^2 = 0.69889600$; $x_4 = 0.8896$;

$x_4^2 = 0.48832144$; $x_5 = 0.8321$;

$x_5^2 = 0.23843689$; $x_6 = 0.8436$;

$x_6^2 = 0.71166096$; $x_7 = 0.1660$;

$x_7^2 = 0.02755600$; $x_8 = 0.7556$;

$x_8^2 = 0.57093136$; $x_9 = 0.0931$;

$x_9^2 = 0.00866761$; $x_{10} = 0.8667$;

$x_{10}^2 = 0.75116889$; $x_{11} = 0.1168$;

$x_{11}^2 = 0.01364224$; $x_{12} = 0.3642$.

2. Моделирование дискретной случайной величины с таблично заданным законом распределения

Законом распределения дискретной случайной величины Z называется перечень всех ее возможных значений z_i и их вероятностей $p_i = P(Z = z_i)$:

$$(z_1, z_2, ..., z_n;\ p_1, p_2, ..., p_n).$$

Для реализации отдельного псевдослучайного значения z можно применить следующий алгоритм:

– отрезок $[0,1]$ разбивается на частичные отрезки, длины которых равны заданным вероятностям:

$$\Delta_1 = [0, p_1), \Delta_2 = [p_1, p_1 + p_2), ..., \Delta_n = [p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}, 1];$$

– генерируется псевдослучайное число x, равномерно распределенное на $[0,1]$;

– величине z присваивается значение z_i, если $x \in \Delta_i$.

Пример. Пусть распределение имеет вид $(2, 5, 8, 9;\ 0.3, 0.1, 0.2, 0.4)$. Полученные в примере п.1 значения x_i последовательно приводят к следующим значениям z: $2, 2, 2, 9, 9, 9, 9, 2, 9, 2, 5$.

3. Моделирование дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона

Дискретная случайная величина A с бесконечным множеством значений распределена по *закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями

$$P(A = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Математическое ожидание $M(A) = \lambda$, дисперсия $D(A) = \lambda$.

Распределение Пуассона во многих случаях имеют случайные величины, описывающие работу систем массового обслуживания.

Реализацию отдельного псевдослучайного значения a можно осуществить по следующему алгоритму:

– генерируются псевдослучайные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, равномерно распределенные на $[0,1]$;

– последовательно вычисляются произведения x_1, $x_1 x_2$, $x_1 x_2 x_3$, … — до тех пор, пока не выполнится условие $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \le e^{-\lambda} < x_1 x_2 \ldots x_n$;

– в качестве значения a принимается число n;

– если неравенству удовлетворяет первое из равномерно распределенных чисел x_1, то $a = 0$.

Пример. Для $\lambda = 2$ имеем $e^{-2} \approx 0{,}1353$. Для полученных в примере п.1 значений x_i последовательно получаем:

$$x_1 = 0{,}2477 > 0{,}1353;$$

$$x_1 x_2 \approx 0{,}0335 < 0{,}1353; \quad a = 1.$$

4. Моделирование дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону

Дискретная случайная величина Y распределена по *биномиальному закону с параметрами n и p*, если ее возможные значения

$$0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n-1, n$$

выражают число k успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p, а соответствующие вероятности равны вероятностям числа успехов:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математическое ожидание $M(Y) = np$, дисперсия $D(Y) = npq$.

Реализацию отдельного псевдослучайного значения y можно осуществить по следующему алгоритму:

– фиксируется интервал $(\alpha, \alpha + p) \subset [0,1]$;

– генерируются n псевдослучайных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, равномерно распределенных на $[0,1]$;

– подсчитывается количество y попаданий x_i чисел в интервал $(\alpha, \alpha + p)$.

Пример. Пусть $n = 4$, $p = 0.6$. Выбираем $\alpha = 0,2$ и фиксируем интервал $(0.2, 0.8)$. Используя полученные в примере п.1 значения x_1, x_2, x_3, x_4, находим $k = 1$. Используя значения x_1, x_6, x_8, x_{12}, находим $k = 3$.

5. Моделирование непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону

Непрерывная случайная величина U имеет *нормальное распределение* (*распределение Гаусса*) *с параметрами* a *и* $\sigma > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание $M(U) = a$, дисперсия $D(U) = \sigma^2$.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальное распределение называется *стандартным*. Для стандартного распределения реализацию отдельного псевдослучайного значения u можно осуществить по следующему алгоритму:

– генерируются 12 псевдослучайных чисел $x_1, x_2, ..., x_{12}$, равномерно распределенных на $[0,1]$;

– вычисляется их сумма $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

– вычисляется $u = (s - n/2) \cdot \sqrt{n/12}$.

Для реализации отдельного значения $u_{a,\sigma}$ нормального распределения с параметрами a и σ после получения u применяется формула $u_{a,\sigma} = \sigma u + a$.

Пример. Используя полученные в примере п.1 псевдослучайные числа $x_1, x_2, ..., x_{12}$, равномерно распределенные на $[0,1]$, для стандартного нормального распределения получаем:

$$s = 6.1469; \; u = (6.1669 - 12/2) \cdot \sqrt{12/12} = 0.1669.$$

Используя это значение u для распределения с параметрами $a = -3$, $\sigma = 3.5$, получаем $u_{a,\sigma} = 3.5 \cdot 0.1669 - 3 \approx -2.4159$.

6. Моделирование непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону

Непрерывная случайная величина V имеет *показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(V)=\frac{1}{\lambda}$, дисперсия $D(V)=\frac{1}{\lambda^2}$.

Получение отдельного псевдослучайного значения v при заданном λ можно осуществить по формуле $v=-(\ln x)/\lambda$, где x — реализованное псевдослучайное значение равномерного распределения на $[0,1]$.

Пример. Используя полученные выше псевдослучайные значения x_1, x_2, x_3 равномерного распределения на $[0,1]$, получаем три псевдослучайных значения для показательного распределения с параметром $\lambda = 2$:

$$v_1 = -(\ln(0.2477))/2 \approx 1.3955/2 \approx 0.6978;$$
$$v_2 = -(\ln(0.1355))/2 \approx 1.9988/2 \approx 0.9994;$$
$$v_3 = -(\ln(0.8360))/2 \approx 0.1791/2 \approx 0.0896.$$

Задания

1. Методом середины квадратов получить 12 псевдослучайных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ с четырьмя знаками после запятой, равномерно распределенных на [0,1], беря исходное значение x_0 из таблицы:

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
x_0	0.2708	0.9342	0.1343	0.8631	0.7456	0.5324	0.9103	0.8746

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
x_0	0.2703	0.9142	0.5343	0.4621	0.7446	0.1532	0.7910	0.0874

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
x_0	0.2602	0.3102	0.4703	0.5623	0.5426	0.1033	0.5517	0.1089

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_0	0.4612	0.2192	0.6704	0.1623	0.7476	0.1025

2. Используя псевдослучайные числа x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, полученные при выполнении первого задания, получить пять псевдослучайных чисел z с таблично заданным законом распределения (1, 2, 3, 4; p_1, p_2, p_3, p_4).

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
p_1	0.2	0.1	0.25	0.3	0.35	0.45	0.2	0.25
p_2	0.3	0.65	0.4	0.1	0.1	0.2	0.3	0.25
p_3	0.35	0.2	0.2	0.2	0.2	0.25	0.3	0.1
p_4	0.15	0.05	0.15	0.4	0.35	0.1	0.2	0.4

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
p_1	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35	0.45	0.2	0.1
p_2	0.3	0.55	0.45	0.1	0.1	0.1	0.4	0.1
p_3	0.35	0.05	0.1	0.25	0.2	0.25	0.2	0.3
p_4	0.25	0.2	0.2	0.35	0.35	0.2	0.2	0.5

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
p_1	0.4	0.2	0.25	0.3	0.35	0.45	0.2	0.15
p_2	0.3	0.55	0.35	0.2	0.3	0.3	0.4	0.05
p_3	0.05	0.15	0.1	0.15	0.1	0.05	0.1	0.3
p_4	0.25	0.1	0.3	0.35	0.25	0.2	0.3	0.5

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
p_1	0.1	0.25	0.2	0.2	0.1	0.6
p_2	0.3	0.5	0.4	0.3	0.6	0.1
p_3	0.25	0.05	0.25	0.4	0.2	0.1
p_4	0.35	0.2	0.15	0.1	0.1	0.2

3. Используя псевдослучайные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, полученные при выполнении первого задания, получить псевдослучайное число a, распределенное по закону Пуассона с параметром λ. Для вычисления экспоненты использовать онлайн-калькулятор.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
λ	2.37	2.11	2.33	3.00	3.02	1.85	1.97	3.03

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
λ	1.94	2.01	3.54	3.45	2.28	3.72	2.85	2.44

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
λ	3.32	4.00	3.98	1.02	3.73	3.38	2.05	3.11

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
λ	2.94	3.85	4.02	2.77	1.89	2.87

4. Поочередно используя четыре равномерно распределенных числа $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$ $(i = 1, 5, 8)$ из совокупности, полученной при выполнении первого задания, получить шесть псевдослучайных чисел y, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и p, считая успехом попадание x_i в отрезок $[0, p]$.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
p	0.6	0.3	0.4	0.7	0.8	0.5	0.5	0.4

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
p	0.2	0.1	0.5	0.4	0.9	3.72	0.8	0.4

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
p	0.3	0.9	0.3	0.9	0.6	0.3	0.4	0.7

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
p	0.7	0.5	0.3	0.25	0.6	0.5

5. Используя равномерно распределенные псевдослучайные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, полученные при выполнении первого задания, получить псевдослучайное число u, распределенное по нормальному закону с параметрами a и σ.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a	5	-2	4	3	15	4	1	-7
σ	6	34	51	1	7	4	5	5

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a	-5	2	-4	-1	3	9	-9	-8
σ	2	3	7	12	60	3	0.3	0.2

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
a	-4	5	3	-2	4	-4	9	-7
σ	0.9	0.65	0.4	0.7	6	2	0.6	0.5

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	2	1	-5	-3	-5	4
σ	50	10	7	42	5	5

6. Используя числа x_2, x_4, x_{11}, x_{12}, полученные при выполнении первого задания, получить четыре псевдослучайных числа v, распределенных по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Для вычисления натурального логарифма использовать онлайн-калькулятор.

Лабораторная работа № 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Случайным процессом (*случайной функцией*) называется семейство случайных величин X_t, зависящих от параметра t.

В практических приложениях в роли t обычно (но необязательно) выступает время.

Если множество значений параметра t («моментов времени») счетно или конечно (перенумеровано натуральным рядом или его отрезком), то случайный процесс называется *процессом с дискретным временем*, или просто *дискретным*.

Случайный процесс X_t называется *непрерывным,* если выполняются два условия:

1) параметр t принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка (обычно $t \in [0, T]$ или $t \in [0, +\infty)$);

2) при каждом значении t случайная величина X_t является непрерывной.

Сечением случайного процесса X_t, соответствующим фиксированному значению t_0 параметра t, называется случайная величина X_{t_0}.

Для статистического изучения одного сечения необходимо многократно реализовать значения этой случайной величины при $t = t_0$.

Реализацией (траекторией, выборочной функцией) случайного процесса X_t называется (неслучайная) функция $x(t)$, для которой при любом t: $x(t) = X_t$ — реализованное в данном испытании значение случайной величины X_t.

Для получения реализации $x(t)$ нужно осуществить испытание, в результате которого все случайные величины X_t примут какое-либо значение.

Отдельная случайная величина X характеризуется неслучайными числами: математическим ожиданием $M(X)$, дисперсией $D(X)$ и т.д. Взаимовлияние пары случайных величин X и Y характеризуется корреляционным моментом

$$\mu(X,Y) = M\left((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right)$$

и коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\mu(X,Y)}{\sigma_Y \sigma_Y},$$

где σ_Y, σ_Y — средние квадратические отклонения.

Аналогично этому, случайный процесс X_t характеризуется неслучайными функциями аргумента t, каждое значение которых при $t = t_0$ выражает соответствующую характеристику случайной величины-сечения X_{t_0}. При этом пары взаимовлияющих случайных величин доставляются сечениями X_{t_1}, X_{t_2} для двух различных значений параметра t.

Математическим ожиданием случайного процесса X_t называется функция $m_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой:

$$m_X(t) = M(X_t).$$

Геометрически график функции $m_X(t)$ задает «среднюю кривую», вокруг которой расположены графики отдельных реализаций (рис. 2).

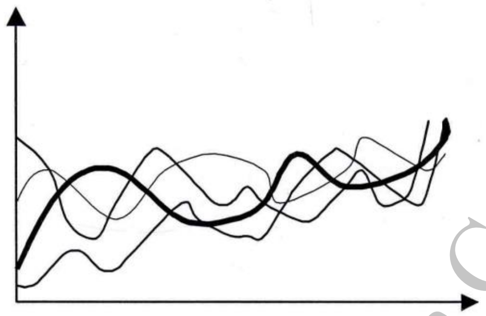


Рис. 2.

Дисперсией случайного процесса X_t называется функция $D_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой:

$$D_X(t) = D(X_t).$$

Дисперсия процесса характеризует степень рассеяния графиков возможных реализаций $x(t)$ вокруг средней кривой.

Средним квадратическим отклонением случайного процесса X_t называется функция $\sigma_X(t)$ аргумента t, задаваемая формулой:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D(X_t)}.$$

Если задан случайный процесс X_t, и X_{t_1}, X_{t_2} — случайные величины, являющиеся сечениями процесса для произвольно взятых значений параметра t_1 и t_2, то для них можно вычислить корреляционный момент $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух переменных $K_X(t_1,t_2)$, задаваемая формулой

$$K_X(t_1,t_2) = \mu(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Примеры

1. Пусть $\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$ — дискретный случайный процесс, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = 3/t$. Проводя для каждого из пяти сечений (то есть отдельно для $t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) четыре реализации показательного закона с параметром $\lambda_t = 3/t$. (см. п. 6 лабораторной работы № 1) и беря для этого из таблицы 1 первые двадцать псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на $[0,1]$, получаем:

Таблица 1.

Случайные числа, равномерно распределенные на [0,1]

0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,5300	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,688	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,823	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971
0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,049	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387

для сечения V_1:

$v_1^{(1)} = 0.2393$; $v_2^{(1)} = 0.6692$; $v_3^{(1)} = 0.2758$; $v_4^{(1)} = 0.1163$;

для сечения V_2:

$v_1^{(2)} = 0.0108$; $v_2^{(2)} = 0.0402$; $v_3^{(2)} = 0.4308$; $v_4^{(2)} = 0.4351$;

для сечения V_3:

$v_1^{(3)} = 1.2063$; $v_2^{(3)} = 0.5920$; $v_3^{(3)} = 3.1212$; $v_4^{(3)} = 0.6348$;

для сечения V_4:

$v_1^{(4)} = 3.7161$; $v_2^{(4)} = 0.8975$; $v_3^{(4)} = 0.4670$; $v_4^{(4)} = 0.8392$;

для сечения V_5:

$v_1^{(5)} = 0.0256$; $v_2^{(5)} = 0.6232$; $v_3^{(5)} = 8.5546$; $v_4^{(5)} = 3.0172$.

Выборочные значения математических ожиданий сечений:

$$m_1 = 0.3251;\quad m_2 = 0.2292;\quad m_3 = 1.3885;$$

$$m_4 = 1.4799;\quad m_5 = 3.0551.$$

Выборочные значения дисперсий сечений:

$$d_1 = 0.0429;\; d_2 = 0.0416;\quad d_3 = 1.0594;$$

$$d_4 = 1.6940;\; d_5 = 11.3343.$$

Выборочные значения средних квадратических отклонений сечений:

$$\sigma_1 = 0.2071,\; \sigma_2 = 0.2039,\; \sigma_3 = 1.0292,$$

$$\sigma_4 = 1.3015,\; \sigma_5 = 3.3666.$$

2. Пусть случайный процесс с непрерывным временем A_t, $t \geq 0$ имеет вид $A_t = X_t + Y_t + Z_t$, где слагаемые независимы, X_t распределено по показательному закону с параметром $\lambda(t) = 2t + 3$, Y_t — по нормальному закону с параметрами $a(t) = \frac{1}{t^2}$, $\sigma(t) = 2t$, Z_t — равномерно на отрезке $[\alpha(t), \beta(t)] = [3t, 11t]$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию процесса A_t. Имеем:

$$m_X(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{1}{2t+3},\quad D_X(t) = \frac{1}{(\lambda(t))^2} = \frac{1}{(2t+3)^2};$$

$$m_Y(t) = a(t) = \frac{1}{t^2},\quad D_Y(t) = \sigma(t) = 2t;$$

$$m_Z(t) = (\alpha(t) + \beta(t))/2 = 7t,\quad D_Z(t) = \frac{(\beta(t) - \alpha(t))^2}{12} = \frac{16t^2}{3}.$$

Применяя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$m_A(t) = m_X(t) + m_Y(t) + m_Z(t) = \frac{1}{2t+3} + \frac{1}{t^2} + 7t;$$

$$D_A(t) = D_X(t) + D_Y(t) + D_Z(t) = \frac{1}{(2t+3)^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{16t^2}{3}.$$

Задания

1. Осуществить три реализации дискретного случайного процесса $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = 5/kt$, беря для этого из таблицы 1 двенадцать псевдослучайных чисел, с i-го по $i+11$-е.

2. Осуществить три реализации дискретного случайного процесса $\{G_1, G_2, G_3\}$, сечения которого G_t имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda_t = c/kt$, беря для этого из таблицы 1 псевдослучайные числа, начиная с j-го.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
k	4	6	5	7	5	2	4	3
c	3	2	3	5	4	6	1	3
i	11	71	81	131	141	81	61	21
j	101	51	41	171	31	1	11	81

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
k	5	6	5	7	5	2	4	3
c	3	4	3	5	4	6	1	3
i	91	71	81	151	141	81	41	161
j	101	51	31	171	31	1	11	81

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
k	5	3	5	7	5	2	4	3
c	3	4	3	4	4	6	1	3
i	91	71	141	121	71	51	91	101
j	101	21	31	71	131	1	11	81

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
k	6	5	2	4	3	0.6
c	5	2	6	1	2	4
i	101	111	81	41	161	21
j	11	41	1	11	31	151

Найти математическое ожидание $m_A(t)$ и дисперсию $D_A(t)$ процесса A_t. $A_t = kX_t + cY_t + kZ_t$, в котором слагаемые независимы, X_t распределено по показательному закону с параметром $\lambda(t) = kt$, Y_t — по нормальному закону с параметрами $a(t) = \frac{c}{t^2}$, $\sigma(t) = 2ct$, Z_t — равномерно на отрезке $[\alpha(t), \beta(t)] = [it, (i+j)t]$.

Лабораторная работа № 3

ЦЕПИ МАРКОВА — КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ

Теоретические сведения

Последовательность испытаний $И_1, И_2, \ldots, И_n, \ldots$, в которых число k исходов $A_i^{(n)}$ одинаково ($k \geq 3$) либо счетно ($k = \infty$):

$$И_n: (A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_i^{(n)}, \ldots),$$

образует *цепь Маркова*, если для любых номеров испытаний

$$n > n_1 > n_2 > \ldots > n_l$$

и для любых номеров исходов этих испытаний

$$i, i_1, i_2, \ldots, i_l$$

имеет место равенство условных вероятностей:

$$P(A_i^n / A_{i_1}^{n_1} A_{i_2}^{n_2} \ldots A_{i_l}^{n_l}) = P(A_i^n / A_{i_1}^{n_1}). \qquad (2)$$

Содержательно условие (2) означает, что условные вероятности зависят только от исходов последнего из предшествующих испытаний. Если трактовать значения n как моменты времени:

n (будущее) $>$ n_1 (настоящее) $>$ n_2 (прошлое),

то (2) означает, что «прошлое не влияет на будущее при фиксированном настоящем».

Возможные исходы $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_k^{(n)}$ n-го испытания трактуют как возможные состояния системы в момент времени n.

Переходными вероятностями (вероятностями перехода цепи Маркова) за один шаг называются условные вероятности

$${}_n p_{ij} = P(A_j^n / A_i^{n-1}).$$

Их трактуют как вероятности перехода из состояния i в состояние j в момент времени n (или на шаге n).

Цепь Маркова называется *однородной*, если вероятности перехода не зависят от n: ${}_n p_{ij} = p_{ij}$. Содержательно условие однородности означает что *вероятностный механизм переходов системы не меняется со временем*.

Далее будут рассматриваться только однородные цепи Маркова.

Для переходных вероятностей выполняются условия: $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$. Последнее равенство означает, что система в следующий момент обязательно перейдет в некоторое состояние, так что данная сумма выражает вероятность достоверного события.

Переходные вероятности за один шаг образуют матрицу $P = P^{(1)} = (p_{ij})$.

Матрица вероятностей перехода за m шагов образована условными вероятностями: $P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)}) = \left(P(A_j^n / A_i^{n-m})\right)$. Имеет место равенство $P^{(m)} = P^m$, то есть матрица вероятностей перехода за m шагов является m-й степенью матрицы вероятностей перехода за один шаг.

Начальное распределение вероятностей состояний однородной цепи Маркова с k состояниями в момент $n=0$ задается строкой $p(0)=(p_1,..., p_k)$, где $p_i \ge 0,\ p_1+...+p_k=1$. После первого перехода в момент $n=1$ распределение вероятностей состояний задается вектором $p(1)=p(0)\cdot P$ (произведение строки на матрицу); после второго шага распределение вероятностей состояний $p(2)=p(0)\cdot P^2=p(1)\cdot P$ и т. д.

Состояние A_j *достижимо за* m *шагов* из состояния A_i, если $p_{ij}^{(m)}>0$. Состояния A_i и A_j являются *сообщающимися за* m *шагов*, если они достижимы друг из друга: $p_{ij}^{(m)}>0$ и $p_{ji}^{(m)}>0$. Состояние A_j называется *несущественным*, если при некотором m $p_{jl}^{(m)}>0$, но при всех $t=1,2,3,...$ $p_{lj}^{(t)}=0$ (система, выйдя однажды из состояния A_j, больше никогда в него не вернется). Состояние A_j называется *поглощающим*, если $p_{jj}=1$.

Примеры

Однородная цепь Маркова имеет четыре состояния и переходит с равными вероятностями $1/k$ из состояния i в достижимые из него за один шаг состояния $(i=1,2,3,4)$ (рис. 3).

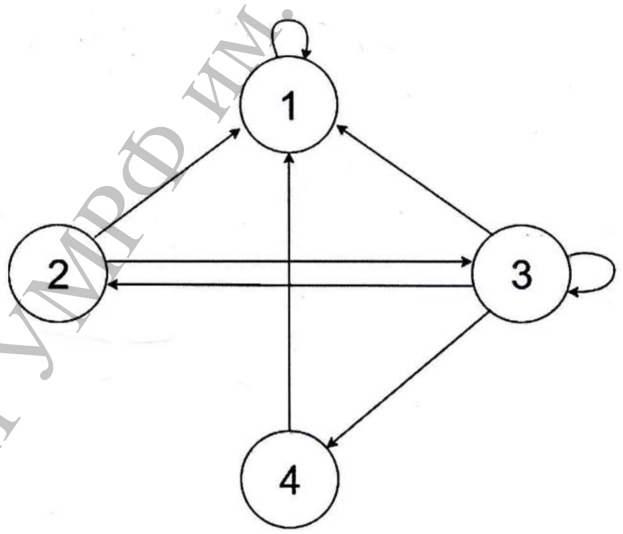


Рис. 3.

Матрица переходных вероятностей за один шаг:

$$P^{(1)}=P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вероятностей перехода за два шага является квадратом матрицы P:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/8 & 8 \\ 11/16 & 1/16 & 3/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вероятностей перехода за три шага является третьей степенью матрицы P:

$$P^{(3)} = P^3 = P^2 P =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/8 & 8 \\ 11/16 & 1/16 & 3/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 27/32 & 1/32 & 5/64 & 3/64 \\ 53/64 & 3/64 & 5/64 & 3/64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Состояния A_2 и A_3 являются сообщающимися за три шага, поскольку $p_{23}^{(3)} = 5/64 > 0,\ p_{32}^{(3)} = 3/64 > 0$. Состояние A_1 достижимо из состояния A_3 за два шага, поскольку $p_{31}^{(2)} = 1/16 > 0$, в то время как состояние A_3 не достижимо из состояния A_1 ни за один, ни за два, ни за три шага: $p_{13} = p_{13}^{(2)} = p_{13}^{(3)} = 0$. Состояние A_1 является поглощающим, поскольку $p_{11} = 1$. Состояние A_2 является несущественным, поскольку $p_{21} = 1/2 > 0$, но для любой степени P^m исходной матрицы P выполняется $p_{12}^{(m)} = 0$.

Задания

1. Однородная цепь Маркова имеет четыре состояния (см. рисунки к заданию ниже) и переходит с равными вероятностями $1/k$ из состояния i в достижимые из него за один шаг состояния $j_1, ..., j_k$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

1) Построить матрицы переходных вероятностей: $P^{(1)}$ — за один шаг, $P^{(2)}$ — за два шага и $P^{(3)}$ — за три шага.

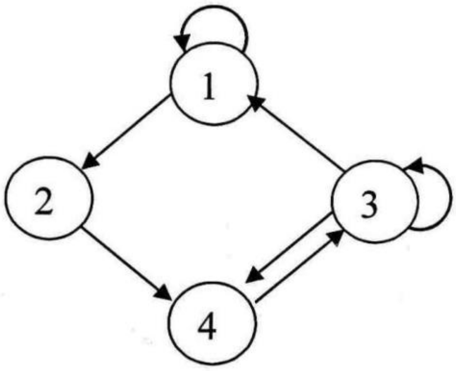
2) Найти поглощающие состояния.

3) Найти достижимые состояния по матрицам $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$.

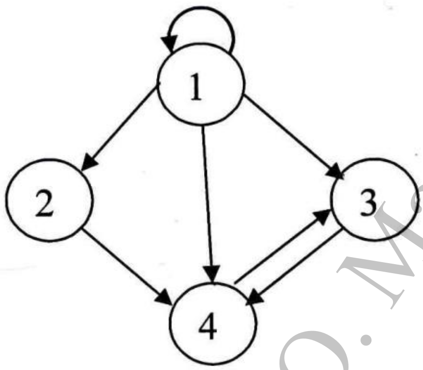
4) Найти сообщающиеся состояния по матрицам $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$.

5) Найти несущественные состояния по матрицам $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$.

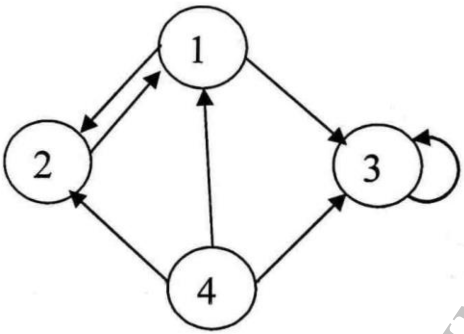
Вар. 1.



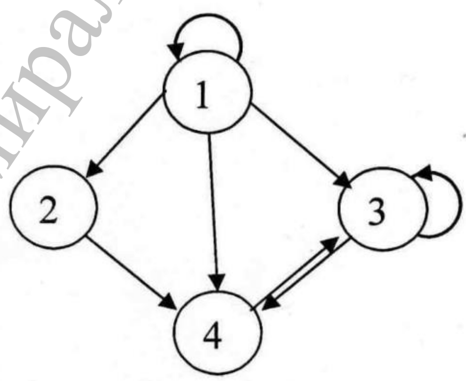
Вар. 2.



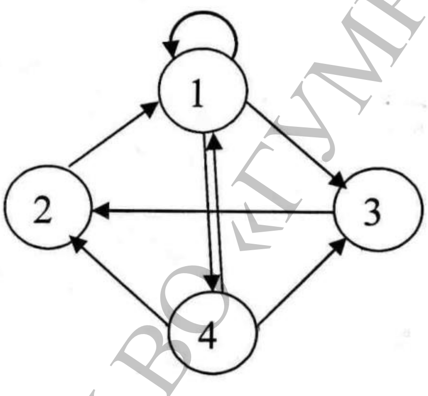
Вар. 3.



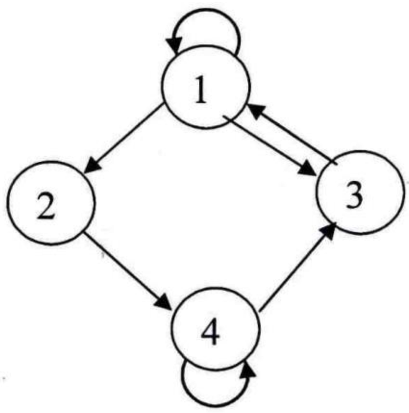
Вар. 4.



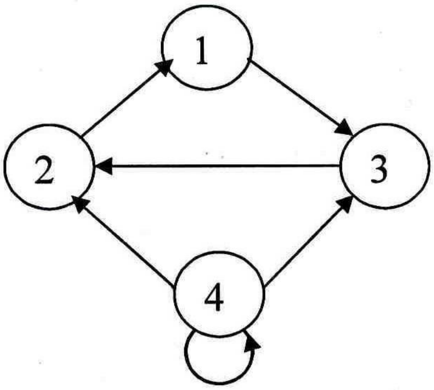
Вар. 5.



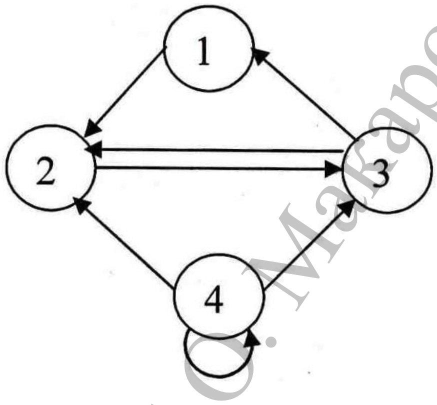
Вар. 6.



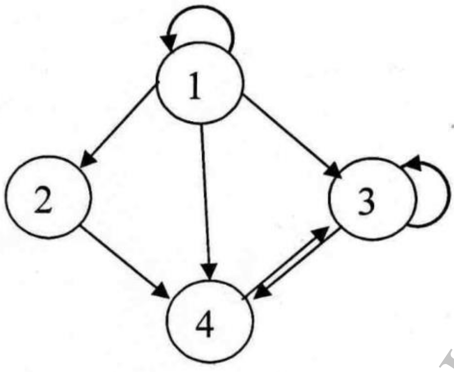
Вар. 7.



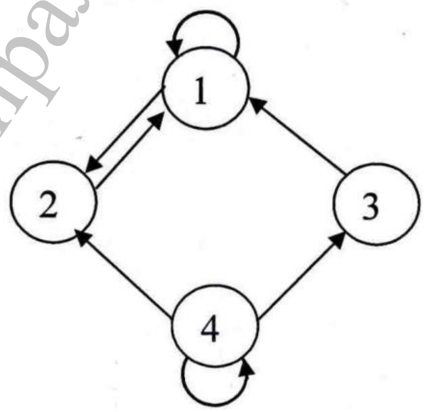
Вар. 8.



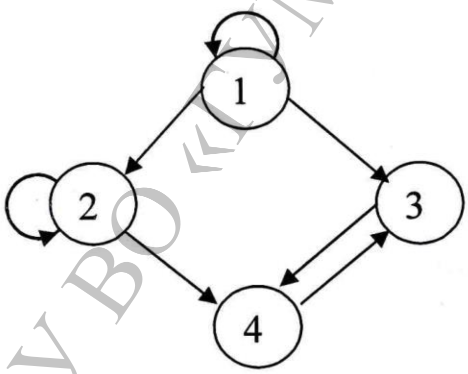
Вар. 9.



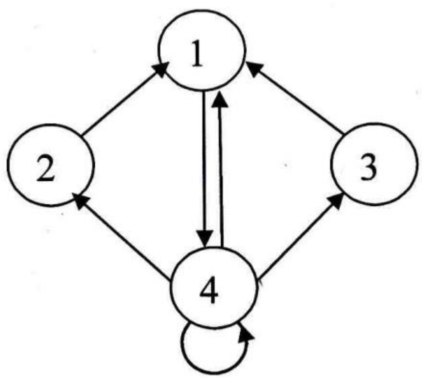
Вар. 10.



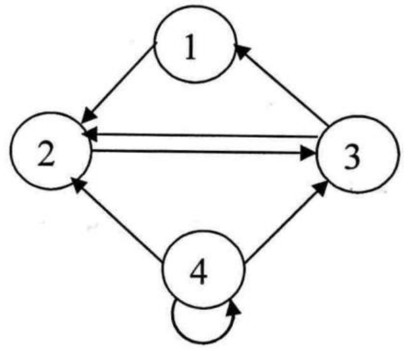
Вар. 11.



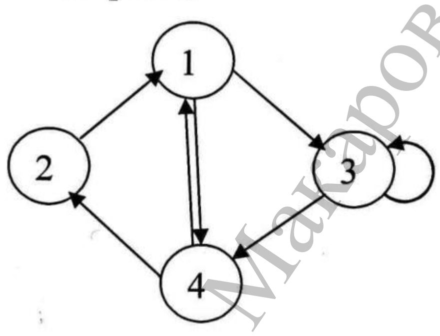
Вар. 12.



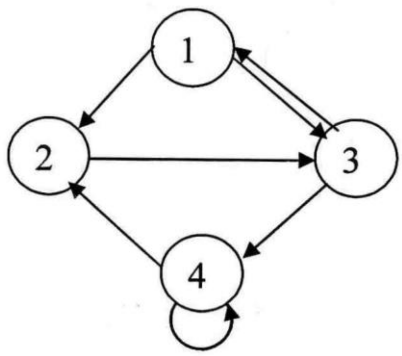
Вар. 13.



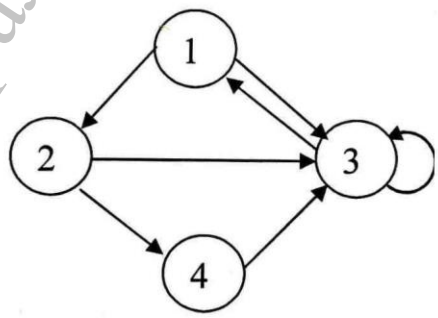
Вар. 14.



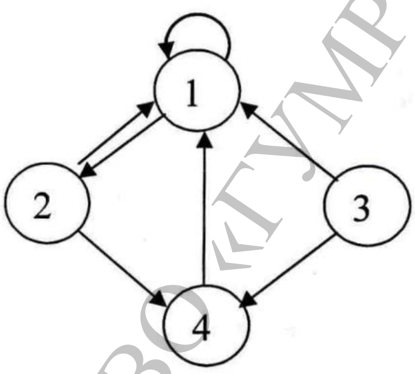
Вар. 15.



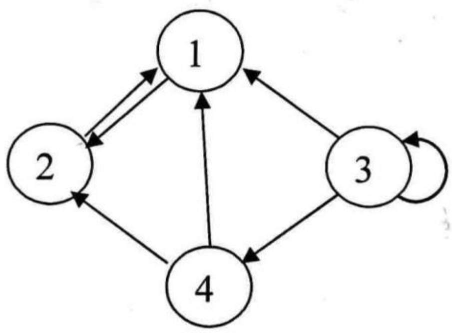
Вар. 16.



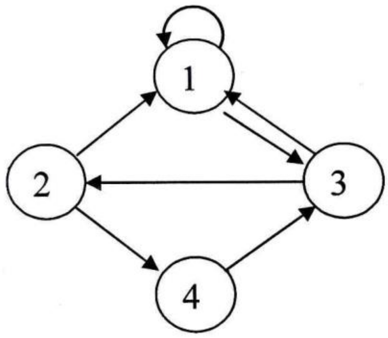
Вар. 17.



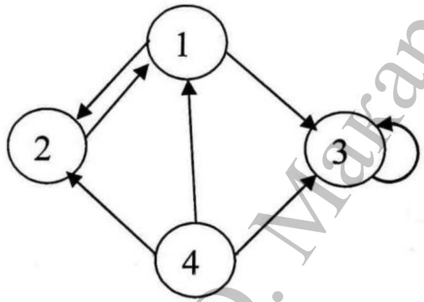
Вар. 18.



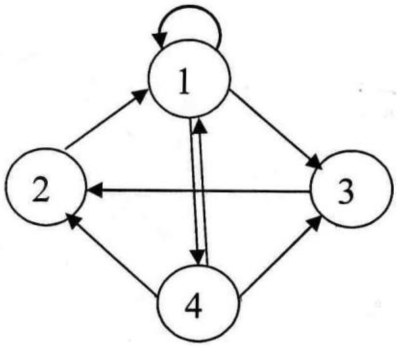
Вар. 19.



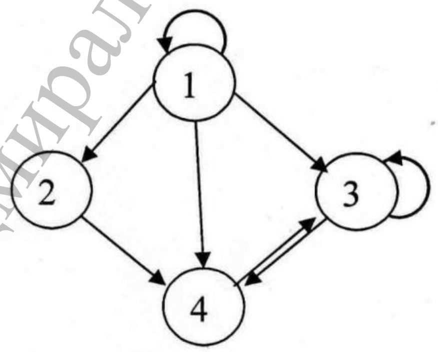
Вар. 20.



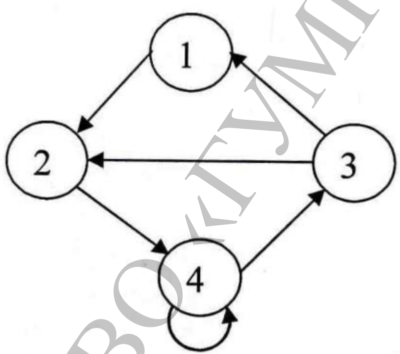
Вар. 21.



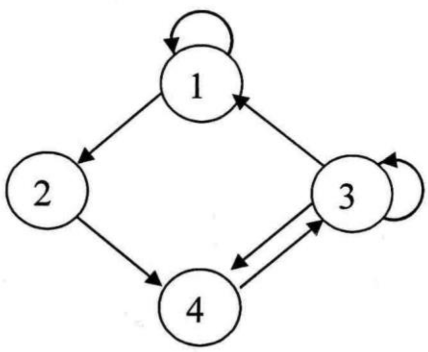
Вар. 22.



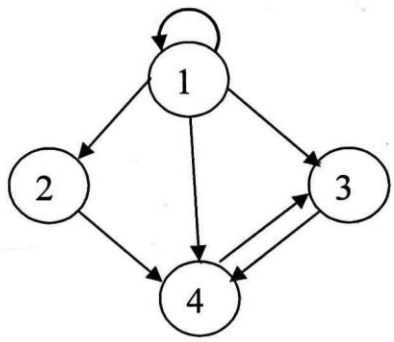
Вар. 23.



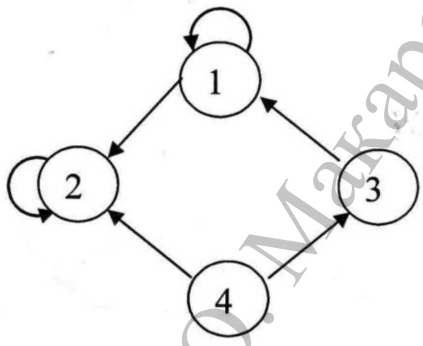
Вар. 24.



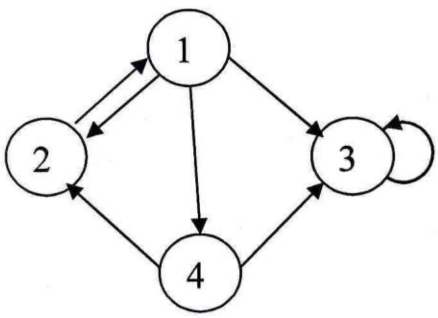
Вар. 25.



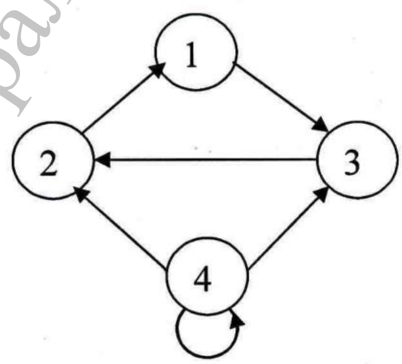
Вар. 26.



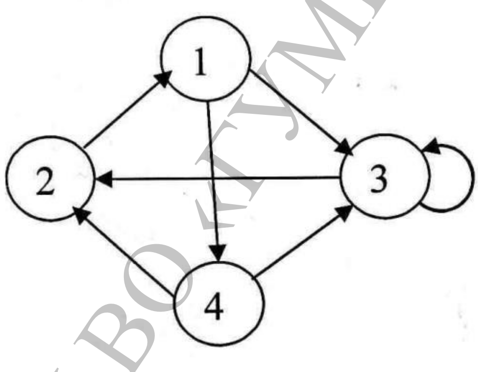
Вар. 27.



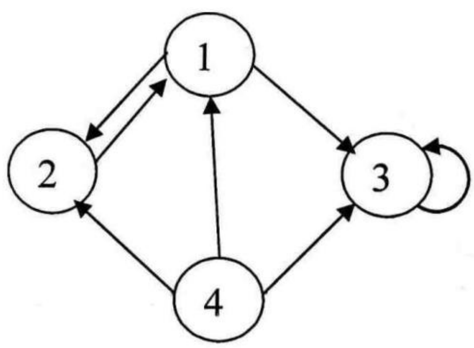
Вар. 28.



Вар. 29.



Вар. 30.



Лабораторная работа № 4

ЦЕПИ МАРКОВА — МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

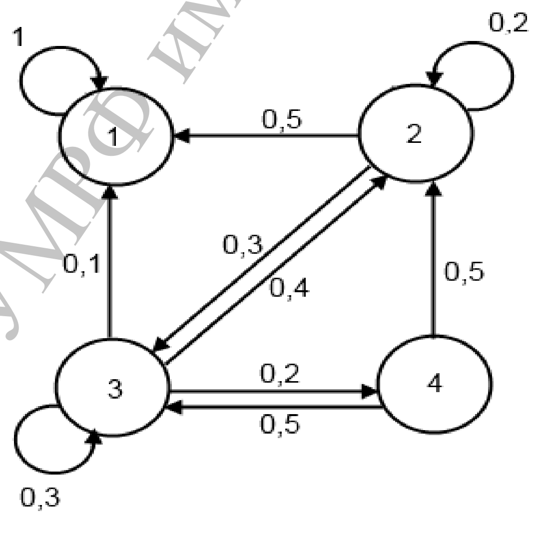
Теоретические сведения

Начальное распределение вероятностей состояний однородной цепи Маркова с k состояниями в момент $n=0$ задается вектором $p(0)=(p_1,\ldots,p_k)$, где $p_i^{(0)}\geq 0,\ p_1^{(0)}+\ldots+p_k^{(0)}=1$. После первого перехода в момент $n=1$ распределение вероятностей состояний задается вектором $p(1)=p(0)\cdot P$; после второго шага — вектором $p(2)=p(0)\cdot P^2=p(1)\cdot P$, и т. д.

Примеры

Матрица $P^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.2 & \beta & 0\\ 0.1 & \alpha & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0.5 & \gamma & 0\end{pmatrix}$ является матрицей вероятностей перехода, если сумма элементов каждой строки равна 1, то есть равна вероятности достоверного события (в какое-либо состояние система на очередном шаге обязательно перейдет). Поэтому $\alpha=0.4,\ \beta=0.3,\ \gamma=0.5$.

Ориентированный взвешенный граф состояний системы имеет вид



Поглощающим является 1-е состояние, потому что из него невозможно («возможно с нулевой вероятностью») перейти в какое-либо другое состояние.

При начальном распределении вероятностей состояний цепи Маркова $p(0)=(0.1, 0.3, 0.2, 0.4)$ распределение вероятностей состояний после первого шага

$$p(1) = p(0)\cdot P^{(1)} = (0.1, 0.3, 0.2, 0.4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (0.27, 0.34, 0.35, 0.04)\ .$$

После второго шага распределение вероятностей состояний

$$p(2) = p(1)\cdot P^{(1)} = (0.27, 0.34, 0.35, 0.04)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0.475, 0.228, 0.227, 0.070)\ .$$

После третьего шага распределение вероятностей состояний

$$p(3) = p(2)\cdot P^{(1)} = (0.475, 0.228, 0.227, 0.070)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0.6117, 0.1714, 0.1715, 0.0454)\ .$$

Задания

Дана матрица вероятностей перехода за один шаг $P^{(1)}$ для системы с четырьмя возможными состояниями.

1) Найти α, β и γ.

2) Построить ориентированный взвешенный граф состояний этой системы (веса ребер равны вероятностям, ребра с нулевыми весами не показываются).

3) Найти поглощающие состояния.

4) По заданному начальному распределению $p(0)$ найти распределение вероятностей по состояниям: $p(1)$ — после первого шага, $p(2)$ — после второго шага, $p(3)$ — после третьего шага.

Вар. 1.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.2 & \beta & 0 \\ \alpha & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.1, 0.3, 0.2, 0.4)$

Вар. 2.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2 & \beta & 0.2 & 0.4 \\ \alpha & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & \gamma & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$

Вар. 3.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ \alpha & 0.5 & \beta & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & \gamma \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.3, 0.1, 0.2, 0.4)$$

Вар. 4.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & \alpha & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & \beta \\ \gamma & 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.1, 0.7, 0.1, 0.1)$$

Вар. 5.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & \beta \\ \gamma & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.2, 0.1, 0.1, 0.6)$$

Вар. 6.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ \alpha & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & \beta & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.4, 0.2, 0.3, 0.1)$$

Вар. 7.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ \alpha & 0.5 & \gamma & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & \beta & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.2, 0.1, 0.2, 0.5)$$

Вар. 8.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 & \alpha & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & \beta & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$$

Вар. 9.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & \gamma & 0.5 \\ \alpha & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & \beta & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.6, 0.1, 0.1, 0.2)$$

Вар. 10.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & \alpha & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & \beta & \gamma \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$$

Вар. 11.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0.1 & 0.2 \\ \beta & 0 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & \gamma & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.1, 0.4, 0.1, 0.4)$$

Вар. 12.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.2 & \gamma & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.4, 0.2, 0.2, 0.2)$$

Вар. 13.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & \alpha \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & \beta & 0 \\ 0.1 & 0.5 & \gamma & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3)$$

Вар. 14.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & \alpha & 0.3 & 0.2 \\ \beta & 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

Вар. 15.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & \beta & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.3, 0.1, 0.3, 0.3)$

Вар. 16.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & \alpha \\ \beta & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & \gamma & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.1, 0.6, 0.2, 0.1)$

Вар. 17.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & \beta & 0.2 \\ 0.5 & \gamma & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.2, 0.1, 0.5, 0.2)$

Вар. 18.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & \alpha & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & \beta \\ \gamma & 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$

Вар. 19.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.6, 0.1, 0.1, 0.2)$

Вар. 20.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & \alpha & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & \beta & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & \gamma & 0.5 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$

Вар. 21.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0.1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & \beta \\ \gamma & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.1, 0.1, 0.3, 0.5)$

Вар. 22.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & \alpha & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & \beta \\ 0 & 0.2 & \gamma & 0.7 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.7)$

Вар. 23.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ \alpha & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.4, 0.1, 0.4, 0.1)$

Вар. 24.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & \alpha \\ 0.3 & 0.1 & \beta & 0.2 \\ 0.1 & \gamma & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.1, 0.5, 0.3, 0.1)$

Вар. 25.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ \alpha & \beta & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$

Вар. 26.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ \alpha & 0 & 0.3 & 0.2 \\ \beta & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & \gamma & 0.5 \end{pmatrix}$$

$p^{(0)} = (0.4, 0.1, 0.4, 0.1)$

Вар. 27.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ \gamma & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & \alpha & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p^{(0)} = (0.3, 0.1, 0.4, 0.2)$

Вар. 28.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.3 & \gamma \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & \alpha & 0.3 & 0.2 \\ \beta & 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.3, 0.1, 0.2, 0.4)$

Вар. 29.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & \gamma \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ \beta & 0.5 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.2, 0.2, 0.2, 0.4)$

Вар. 30.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$p(0) = (0.7, 0.1, 0.1, 0.1)$

2. В начальный момент $t = 0$ частица находится на числовой оси в точке (состоянии) $k = 0$. В моменты $t = 1, \ldots, 10$ она с равными вероятностями $1/3$ остается в текущем состоянии либо переходит в ближайшую целую точку k слева или справа — в зависимости от того, в какой из промежутков $[0, 0.333)$, $[0.333, 0.666)$, $[0.666, 1]$ попадает при очередном моделировании равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина X. Получить таблицу случайного блуждания точки за 10 шагов:

t	1	…	10
k	k_1	…	k_{10}

Использовать для X таблицу равномерного распределения на $[0,1]$; значения из таблицы брать, начиная с номера i.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
i	61	31	1	171	141	181	21	41

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
i	81	71	61	101	171	51	31	61

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
i	41	71	41	21	61	151	91	11

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
i	121	141	91	51	161	31

Таблица 2

Случайные числа, равномерно распределенные на [0,1]

0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,0496	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387
0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,0053	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,6880	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,8230	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971

Лабораторная работа № 5
КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Взаимовлияние пары случайных величин X и Y характеризуется корреляционным моментом

$$\mu(X,Y) = M\left((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right)$$

и коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\mu(X,Y)}{\sigma_Y \sigma_Y},$$

где σ_X, σ_Y — средние квадратические отклонения. Для корреляционного момента справедливо равенство:

$$\mu(X,Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Для коэффициента корреляции справедливо неравенство: $|r_{XY}| \le 1$.

Если задан случайный процесс X_t, а X_{t_1}, X_{t_2} — случайные величины, являющиеся сечениями процесса для произвольно взятых значений параметра t_1 и t_2, то для них можно вычислить корреляционный момент $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух переменных $K_X(t_1,t_2)$, задаваемая формулой

$$K_X(t_1,t_2) = \mu(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Нормированной корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух аргументов

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{\mu(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_Y(t_2)}.$$

При нахождении функций $K_X(t_1,t_2)$ и $r_{XY}(t_1,t_2)$ используются свойства математического ожидания и дисперсии.

Если имеются выборки объема n для сечений X_{t_1}, X_{t_2}:

$$(x_1^{(t_1)},\ldots,x_n^{(t_1)}),\ \ (x_1^{(t_2)},\ldots,x_n^{(t_2)}),$$

и уже вычислены выборочные значения m_{t_1}, m_{t_2} их математических ожиданий, то выборочное значение корреляционной функции вычисляется по формуле:

$$K_X(t_1,t_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(t_1)} - m_{t_1})(x_i^{(t_2)} - m_{t_2}). \qquad (3)$$

Примеры

1. Пусть случайный процесс имеет вид $X_t = tU$ $(t \geq 0)$, где случайная величина U имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 5$. Для вычисления нормированной корреляционной функции $r_X(t_1, t_2)$ последовательно находим:

$$m_X(t) = M(tU) = tM(U) = 3t;$$

$$D_X(t) = D(tU) = t^2 D(U) = 25t^2;$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)} = 5t;$$

$$\mu(X_{t_1}, X_{t_2}) = M(X_{t_1} X_{t_2}) - M(X_{t_1}) M(X_{t_2}) = M(X_{t_1} X_{t_2}) - 9t_1 t_2;$$

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{M(X_{t_1} X_{t_2}) - 9t_1 t_2}{5t_1 \cdot 5t_2}.$$

2. Если у случайной величины U из предыдущего примера математическое ожидание $M(U) = 0$ (то есть она является центрированной), то

$$M(X_{t_1} X_{t_2}) = 3t_1 3t_2 M(U^2) = 9t_1 t_2 D(U) = 45t_1 t_2,$$

и тогда

$$\mu(X_{t_1}, X_{t_2}) = 45t_1 t_2 - 9t_1 t_2 = 36t_1 t_2.$$

3. Пусть $V_t = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ — дискретный случайный процесс, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = 3/t$. В примере 1 лабораторной работы № 2 для каждого из пяти сечений (то есть отдельно для $t = 1, 2, 3, 4, 5$) получены четыре реализации и вычислены выборочные значения математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратических отклонений:

V_1: $v_1^{(1)} = 0.2393$; $v_2^{(1)} = 0.6692$; $v_3^{(1)} = 0.2758$; $v_4^{(1)} = 0.1163$;
V_2: $v_1^{(2)} = 0.0108$; $v_2^{(2)} = 0.0402$; $v_3^{(2)} = 0.4308$; $v_4^{(2)} = 0.4351$;
V_3: $v_1^{(3)} = 1.2063$; $v_2^{(3)} = 0.5920$; $v_3^{(3)} = 3.1212$; $v_4^{(3)} = 0.6348$;
V_4: $v_1^{(4)} = 3.7161$; $v_2^{(4)} = 0.8975$; $v_3^{(4)} = 0.4670$; $v_4^{(4)} = 0.8392$;
V_5: $v_1^{(5)} = 0.0256$; $v_2^{(5)} = 0.6232$; $v_3^{(5)} = 8.5546$; $v_4^{(5)} = 3.0172$.

$m_1 = 0.3251$; $m_2 = 0.2292$; $m_3 = 1.3885$;
$m_4 = 1.4799$; $m_5 = 3.0551$.

$d_1 = 0.0429$; $d_2 = 0.0416$; $d_3 = 1.0594$;
$d_4 = 1.6940$; $d_5 = 11.3343$.

$\sigma_1 = 0.2071$, $\sigma_2 = 0.2039$, $\sigma_3 = 1.0292$,
$\sigma_4 = 1.3015$, $\sigma_5 = 3.3666$.

Вычисление по формуле (3) выборочных значений корреляционной функции $K_V(t_1,t_2)$ для пары сечений V_1,V_3 (то есть при $t_1=1,\ t_2=3$), а также для пары сечений V_2,V_4 (то есть при $t_1=1,\ t_2=3$) дает:

$K_V(1,3)=-0{,}6701,\quad K_V(2,4)=-0.1063.$

Задания

1.Случайный процесс имеет вид $X_t=f(t)\cdot U\ (t\geq 0)$, где случайная величина U имеет нормальное распределение с параметрами $a=f(2)$ и $\sigma=f(1)$. Найти $m_X(t)$, $D_X(t)$, $\sigma_X(t)$, $\mu(X_{t_1},X_{t_2})$, $r_X(t_1,t_2)$ при заданном математическом ожидании произведения сечений $M(X_{t_1}X_{t_2})=t_1^3t_2$.

2.Найти выборочные значения корреляционной функции $K_V(t_1,t_2)$ для пары сечений V_1,V_3 и для пары сечений V_2,V_4 по пяти реализациям дискретного случайного процесса $V_t=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t=\varphi(t)$. Для реализации выборочных значений сечений использовать таблицу равномерного распределения на $[0,1]$; значения из таблицы брать, начиная с номера i.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$f(t)$	$2t^2$	t^2+1	t^2+2	t^3	$2t+1$	$2t+3$	$3t^2$	$8/t^2$
$\varphi(t)$	$1/t$	$2/t$	$5/t$	$3/t$	$10/t$	$6/t$	$7/t$	$1/t$
i	1	21	31	41	51	61	71	81

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
$f(t)$	$3/t^2$	$t+1$	$5/t$	$3/t+2$	$4/(t+1)$	t^2	$2t^2-3$	t^2+5
$\varphi(t)$	$11/t$	$12/t$	$1/t$	$13/t$	$10/t$	$2/t$	$7/t$	$10/t$
i	91	101	111	121	131	141	151	161

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
$f(t)$	$5t-3$	$2t/(t+1)$	$2t-2$	$t+4$	$(t+1)/t$	$(t+2)/t^2$	t^2-1	t^2-2
$\varphi(t)$	$1+t$	$t-1$	$2t-1$	$3t-1$	$5/t$	$6/(t+1)$	$1/(2t)$	t
i	171	181	21	61	71	51	81	91

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$f(t)$	$t+3$	$3t-3$	$2t+1$	$2t+3$	$2t^2$	$1/(2t-1)$
$\varphi(t)$	$1/(t+1)$	$(t+1)/t$	$3/t$	t^2-1	$2/t$	$4/t$
i	81	71	61	101	171	51

Таблица 3.

Случайные числа, равномерно распределенные на [0,1]

0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,0496	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387
0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,0053	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,6880	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,8230	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971

Лабораторная работа № 6

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, ... X_n, ...$, имеющих математические ожидания и дисперсии, *сходится в среднеквадратическом* (*в среднем*) к случайной величине X: $l.i.m. X_n = X$, если числовая последовательность $M\left((X_n - X)^2\right)$ сходится к нулю. Аналогично определяется *предел в среднеквадратическом* при $t \to t_0$ и при $t \to \infty$ для семейства случайных величин X_t, зависящих от непрерывного параметра t:

$$\underset{t \to t_0}{l.i.m.} X_t = X \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} M\left((X_t - X)^2\right) = 0;$$

$$\underset{t \to \infty}{l.i.m.} X_t = X \Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} M\left((X_t - X)^2\right) = 0.$$

Допустима перестановка символов математического ожидания случайной величины и предела в среднеквадратическом:

$$M(\underset{t \to t_0}{l.i.m.} X_t) = \lim_{t \to t_0} M(X_t).$$

Производной случайного процесса X_t называется случайный процесс X_t' (или $\frac{dX_t}{dt}$), каждое сечение которого есть предел в среднеквадратическом отношения приращения сечения процесса X_t к приращению Δt параметра при $\Delta t \to 0$:

$$X_t' = \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}.$$

Аналогично определяются частные производные для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Для производной случайного процесса справедливы обычные формулы дифференцирования.

Производная X_t', будучи случайным процессом, имеет математическое ожидание $m_{X_t'}(t)$, дисперсию $D_{X_t'}(t)$ и корреляционную функцию $K_{X_t'}(t_1, t_2)$.

Математическое ожидание производной случайного процесса равно производной от математического ожидания исходного процесса:

$$m_{X_t'}(t) = (m_X(t))'.$$

Корреляционная функция производной X_t' случайного процесса X_t равна смешанной производной второго порядка от его корреляционной функции:

$$K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Для дисперсии производной случайного процесса справедлива формула:

$$D_{X'}(t) = \left.\frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = t}.$$

Интегралом случайного процесса X_t по отрезку $[T_1, T_2]$ называется случайная величина, равная пределу в среднем интегральной суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i X_{t_i}$$

при условии, что ранг разбиения отрезка $[T_1, T_2]$ стремится к нулю:

$$\int_{t_1}^{t_2} X_t dt = \underset{\rho \to 0}{l.i.m.} S.$$

Аналогичным образом определяются кратные и повторные интегралы для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Примеры

1. Пусть для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = at^2 + bt;\ K_X(t_1,t_2) = De^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}.$$

Дифференцируя, получаем:

$$m_{X'}(t) = (m_X(t))' = (at^2 + bt)' = 2at + b;$$

$$\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1} = (De^{-\alpha(t_2 - t_1)^2})'_{t_1} = 2D\alpha(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2};$$

$$K_{X'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} =$$

$$= 2D\alpha(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2})'_{t_2} = 2D\alpha(1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}.$$

2. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла с переменным верхним пределом $Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau$, если для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X = at + b;\quad K_X(t_1,t_2) = De^{-\alpha|t_1 - t_2|}.$$

Интегрируя, получаем:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau)d\tau = \int_0^t (a\tau + b)d\tau = \frac{at^2}{2} + bt.$$

Учитывая необходимость раскрытия знака модуля в записи $K_X(t_1,t_2)$, рассмотрим при вычислении $K_Y(t_1,t_2)$ два случая:

1) При $t_1 \le t_2$

$$K_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} De^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=D\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2} e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}d\tau_2\right)d\tau_1=$$

$$=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha t_2-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha(t_2-t_1)}).$$

2) При $t_2<t_1$ аналогичным образом получаем

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha t_2-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha(t_1-t_2)}).$$

Объединяя оба случая, приходим к выражению

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{D}{\alpha^2}(2\alpha\min(t_1,t_2)-1+e^{-\alpha t_2}+e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha|t_1-t_2|}).$$

Отсюда можно получить выражение для дисперсии при $t_1=t_2=t$:

$$D_Y(t)=\frac{2D}{\alpha^2}(\alpha t-1+e^{-\alpha t}).$$

Задания

1. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию производной случайного процесса, у которого математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид: $m_X(t)=f(t)$; $K_X(t_1,t_2)=ke^{-(t_2-t_1)^l}$.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f(t)$	$2te^{3t}$	t^2e^{-t}	e^{3t}/t	$t^3\ln t$	$\sqrt{\ln t-t}$
k	-3	2	5	11	17
l	2	4	2	6	8

№ вар.	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$f(t)$	te^{-t}	$\mathrm{tg}(t^2)$	$\sin(t^3-1)$	$\sqrt{t^3}\ln t$	$\sqrt{e^t+1/t}$
k	5	3	-7	-5	12
l	4	2	6	4	2

№ вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$f(t)$	$\sqrt{t}\ln t$	$\sqrt{\ln t}$	$e^{3t}/\sqrt{t}$	$\cos(t+\ln t)$	$\mathrm{tg}^3 t$
k	-3	12	8	-2	-1
l	8	4	2	6	2

№ вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$f(t)$	$2te^{3t}$	t^2e^{-t}	e^{3t}/t	$t^3\ln t$	$\sqrt{\mathrm{tg}\, t}$
k	3	-2	5	-3	11
l	6	2	4	4	8

№ вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
$f(t)$	$(t+t^2)e^{3t}$	$t^{-2}e^{5t}$	e^t / t^2	$\sin(t\ln t)$	$\sqrt{\ln t + t}$
k	2	6	-11	33	-14
l	2	10	8	2	6

№ вар.	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$f(t)$	$\ln t - e^{5t}$	t^2e^{-t}	$e^{2t} / \ln t$	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln^2 t - t}$
k	-7	12	35	-12	-9
l	6	4	2	4	6

2. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла с переменным верхним пределом $Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau$, если для случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = f(t); \quad K_X(t_1,t_2) = ce^{-\alpha|t_2-t_1|}.$$

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f(t)$	te^t	te^{-t}	$\ln t / t$	$\ln^3 t / t$	$\sqrt{3t-2}$
c	3	2	5	11	17
α	2	4	2	6	8

№ вар.	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$f(t)$	e^{3t-1}	$\sin(5t)$	$\cos(4t)$	$\ln t$	$t^2 \ln t$
c	5	3	7	-5	12
α	4	2	6	4	2

№ вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$f(t)$	$t\ln t$	$\sqrt{3t+1}$	$\sin^2 t$	$\cos^2 t$	$\operatorname{tg}^3 t$
c	13	12	8	12	11
α	8	4	2	6	2

№ вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$f(t)$	$t-e^t$	$t+2e^{-t}$	$(t+1)/t$	$t/(t+1)$	7^{-t}
c	3	6	5	31	21
α	6	2	4	4	8

№ вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
$f(t)$	4^{3t}	$t\cos t$	te^{t+2}	5^{3t}	$t\sqrt{t}$
c	2	6	20	33	14
α	2	10	8	2	6

№ вар.	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$f(t)$	$1/t - e^{5t}$	$t-e^{-t}$	$4/(t\ln t)$	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln t}/t$
c	77	12	35	9	19
α	6	4	2	4	6

Лабораторная работа № 7
РЯД ФУРЬЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Числовой ряд и ряд Фурье

Напомним основные понятия, связанные с числовым рядом и рядом Фурье функции. Если задана числовая последовательность x_n, то *числовым рядом* называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

имеющее смысл суммы бесконечного числа слагаемых.

Частичной суммой ряда называется сумма первых его n членов:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$; число S в этом случае называется *суммой ряда*. Если конечного предела не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ длины $T = b - a$ называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} x),$$

где a_n, b_n — *коэффициенты Фурье* функции:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx.$$

При естественных ограничениях на функцию $f(x)$ она является суммой своего ряда Фурье (раскладывается в ряд Фурье).

Разложение случайного процесса в ряд

Одним из основных методов исследования (неслучайных) функций является их представление рядами Фурье, то есть гармонический анализ. Аналогичный метод используется при исследовании случайных процессов.

Пусть $X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(i)}, \ldots$ — последовательность случайных процессов-слагаемых, которой соответствует последовательность частичных сумм:

$$S_t^{(n)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \ldots + X_t^{(n)} .$$

Рядом для последовательности случайных процессов $X_t^{(i)}$ *называется выражение*

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_t^{(i)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \ldots + X_t^{(i)} + \ldots ,$$

имеющее смысл суммы бесконечного числа слагаемых-случайных процессов.

Ряд сходится к случайному процессу X_t, если при каждом значении параметра t имеет место сходимость в среднеквадратическом последовательности частичных сумм:

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.} S_t^{(n)} = X_t .$$

Говорят также, что процесс X_t *раскладывается в ряд*.

Ряд Фурье случайного процесса

Будем предполагать случайный процесс X_t центрированным — в противном случае можно перейти к центрированному случайному процессу

$$\overline{X}_t = X_t - m_X(t) .$$

Процесс X_t на промежутке $[0,T]$ *раскладывается в ряд Фурье*, если

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t) + V_n \sin(\omega_n t) ,$$

где $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{T}$.

На случайные величины U_n, V_n накладываются требования:

– некоррелированность:

$$\mu(U_i, V_j) = \mu(U_i, U_j) = \mu(V_i, V_j) = 0 \text{ при } i \neq j ;$$

– центрированность:

$M(U_i) = M(V_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$;

– попарное равенство дисперсий:

$$D(U_i) = D(V_i) = D_i .$$

Случайный процесс X_t называется *стационарным* (*в широком смысле*), если он удовлетворяет двум условиям:

1) математическое ожидание процесса постоянно при всех значениях параметра t: $m_X(t) = m_X = const$;

2) корреляционная функция процесса зависит только от разности аргументов: $K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau_1, \tau_2)$, если $t_2 - t_1 = \tau_2 - \tau_1$.

Содержательно стационарность процесса означает, что процесс протекает «во времени» однородно, его описание не зависит от выбора начала отсчета параметра t.

Представление стационарного случайного процесса X_t рядом Фурье называется его *спектральным разложением*. При этом случайные величины U_n, V_n называются *амплитудами*, а множители ω_n в аргументах синусов и косинусов (гармоник) — *частотами*.

Пример

Пусть стационарный случайный процесс задан каноническим представлением в виде ряда Фурье

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) + V_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t),$$

где случайная величина U_n равномерно распределена на отрезке $[\frac{3k}{n}, \frac{9}{n}]$, а случайная величина V_n распределена по нормальному закону.

Найдем явную запись случайного процесса.

Поскольку математическое ожидание равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины равно $\frac{a+b}{2}$, то в силу требования центрированности U_n имеем для k условие $\frac{3k}{n} + \frac{9}{n} = 0 \Rightarrow k = -3$. Дисперсия в случае равномерного распределения равна $\frac{(b-a)^2}{12}$, так что для данного случая имеем $D(U_n) = \frac{\left(3/n - (-3/n)\right)^2}{12} = \frac{3}{n^2}$.

Определим параметры нормального закона распределения случайной величины V_n. Центрированность V_n означает, что у данного нормального закона параметр $a_n = M(V_n) = 0$. Из требования равенства дисперсий случайных величин (амплитуд) U_n и V_n следует $D(V_n) = \frac{3}{n^2} \Rightarrow \sigma(V_n) = \frac{\sqrt{3}}{n}$. Частота $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. Например, при $T = \frac{1}{6}$ находим: $\omega_n = 12\pi n$. Дискретный спектр процесса задается набором пар $(D_n, \omega_n) = (\frac{3}{n^2}, 12\pi n)$.

Задания

1. Стационарный случайный процесс X_t имеет каноническое представление в виде ряда Фурье:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) + V_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t);$$

здесь U_n, V_n — некоррелированные случайные величины; U_n равномерно распределена на отрезке $[k\lambda, \lambda^2]$, V_n распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $2\mu - k$ и дисперсией $k^2\mu^2$ (параметр λ задан).

1) Указать, какому условию удовлетворяет корреляционная функция процесса $k_X(\tau)$.

2) Найти k, λ.

3) Найти дискретный спектр (D_n, ω_n) для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ при $t = \frac{T}{8}$ и при $t = \frac{T}{4}$.

4) Найти приближенные значения корреляционной функции $k_X(\tau)$ при $\tau = \frac{\pi}{4}$ и при $\tau = \pi$, приняв в качестве приближения частичную сумму S_5 в представлении $k_X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\omega_n \tau)$.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
λ	1	2	-1	3	-2	6	7	-3

№ вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
λ	8	-7	-6	10	171	51	31	61

№ вар.	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
λ	41	71	41	-10	61	151	91	11

№ вар.	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
λ	2	-5	9	5	16	-14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей: учебник для вузов. — М.: Высш. шк., 2001. — 575 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В*. — Введение в теорию случайных процессов. — М.: 1965. — 655 с.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 2002. — 478 с.
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.
5. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. — М.: 1971. — 536 с.
6. *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: URSS ЛИБРОКОМ, 2009. — 428 с.
7. *Шкадова А. Р., Нырков А. П.* Теория вероятностей. — СПб.: СПГУВК, 2003. — 198 с.
8. *Ястребов М. Ю.* Теория вероятностей. — СПб.: ГУМРФ, 2018. — 96 с.
9. *Ястребов М. Ю., Ланева И. В*. Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи. — СПб.: ГУМРФ, 2019. — 62 с.

Учебное издание

Составители

Ястребов Михаил Юрьевич, канд. эконом. наук, доц.
Ланева Ирина Владимировна, канд. эконом. наук, доц.
Коротков Виталий Валерьевич

Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи

Лабораторный практикум

Издательство ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова

198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2
Тел.: (812) 748-97-19, 748-97-23
E-mail: izdat@gumrf.ru

Публикуется в авторской редакции

Ответственный за выпуск *М. В. Беглецова*
Техническая редактура и оригинал-макет *О. С. Ермакова*

Подписано в печать 21.10.2019
Формат 60×90/8. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 5,5. Тираж 70 экз. Заказ № 416/19