



Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА
имени адмирала С. О. МАКАРОВА**

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра комплексного обеспечения информационной безопасности

**М. Ю. Ястребов, А. П. Нырков
И. В. Ланева, И. В. Ли**

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум

Санкт-Петербург
Издательство ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова

2021

УДК 517.5:551.48
ББК 22.171
Я85

Рецензенты:

Коробейников А. Г., д-р техн. наук, проф.
(Санкт-Петербургский филиал ФГБУН «Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова» РАН);
Кузнецов В. О., канд. физ.-мат. наук, доц.
(ФГБОУ ВО ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова)

Ястребов, М. Ю.
Я85 Теория случайных процессов : лабораторный практикум / М. Ю. Ястребов,
А. П. Нырков, И. В. Ланева, И. В. Ли. — СПб. : ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова, 2021. — 52 с.

Содержание лабораторного практикума соответствует ФГОС ВО по направлению подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и ФГОС ВО по специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем».

Практикум содержит краткие теоретические сведения по теории случайных процессов. Методический аппарат издания представлен примерами типовых задач и подробным описанием их решения, а также вариантами индивидуальных заданий при изучении данной темы.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов очной формы обучения по дисциплине «Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи». Может быть использовано как дополнительный методический материал по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» студентами направлений подготовки 10.03.01, 10.05.03, 01.03.02. Также материал, изложенный в пособии, рекомендуется для использования в научных исследованиях магистрам направления 10.04.01 и аспирантам направления 09.06.01.

Рекомендовано к изданию на заседании кафедры комплексного обеспечения информационной безопасности. Протокол № 11 от 23 июня 2021 года.

ББК 22.171
УДК 517.5:551.48

© ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова», 2021
© М. Ю. Ястребов, А. П. Нырков,
И. В. Ланева, Ли И. В., 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Лабораторная работа № 1. Моделирование стандартных случайных величин.....	5
Лабораторная работа № 2. Моделирование и вычисление выборочных характеристик случайного процесса.....	13
Лабораторная работа № 3. Цепи Маркова. Классификация состояний.....	18
Лабораторная работа № 4. Цепи Маркова. Моделирование случайного блуждания.....	29
Лабораторная работа № 5. Корреляционная функция случайного процесса.....	37
Лабораторная работа № 6. Дифференцирование и интегрирование случайного процесса.....	41
Лабораторная работа № 7. Ряд Фурье случайного процесса.....	47
Список литературы.....	51

ФГБОУ ВО "ТУМРФ им. акад. С.О. Макарова"

ВВЕДЕНИЕ

«Человеческому разуму трудно моделировать случай», — писал выдающийся французский математик Эмиль Борель. Трудно не значит невозможно. «Теория случайных процессов» — это математическая дисциплина, в которой описываются методы моделирования и анализа систем (социальных, технических, экономических и др.), функционирование которых зависит от случайных факторов и потому само в известной степени является случайным.

Случайные (стохастические) помехи в каналах связи рассматриваются при их анализе как распределенные во времени случайные события, т. е. как случайные процессы. В теории вероятностей с помощью понятия случайного процесса формализуется представление о случайной величине, вероятностные свойства которой (функция распределения и выражаемые через нее характеристики) меняются со временем. Таким образом, в каждый момент времени мы имеем дело с новой случайной величиной.

В водно-транспортном вузе дисциплина, ориентированная на различные аспекты применения теории случайных процессов, в том числе на анализ стохастических помех в каналах связи, является обязательной для изучения в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования РФ.

Освоение дисциплины позволяет получить навыки и компетенции в соответствии с государственным образовательным стандартом (ФГОС ВО 3++) по уровню магистратуры:

- УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели;
- УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия;
- УК-5 Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия;
- УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки.

Лабораторный практикум по дисциплине «Теория случайных процессов» направлен на формирование компетенций в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС ВО 3++) по уровню специалитета:

- ОПК-2 Способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач;
- ПК-12 Способность принимать участие в проведении экспериментальных исследований системы защиты информации;
- ПК-12 Способность применять программные средства системного, прикладного и специального назначения, инструментальные средства, языки и системы программирования для решения профессиональных задач.

В настоящем издании представлены лабораторные работы по основным темам дисциплины «Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи»: «Моделирование стандартных случайных величин», «Моделирование и вычисление выборочных характеристик случайного процесса», «Цепи Маркова» (классификация состояний и моделирование случайного блуждания), «Корреляционная функция случайного процесса», «Дифференцирование и интегрирование случайного процесса», «Ряд Фурье случайного процесса».

В каждой из семи лабораторных работ даны краткие теоретические сведения по теме. Методический аппарат издания представлен примерами типовых задач и подробным описанием их решения. Приведены варианты индивидуальных заданий при изучении темы.

В конце издания содержится список литературы, которая была использована при создании данного пособия и рекомендована обучающимся для освоения дисциплины.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАНДАРТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретические сведения

1.1. Моделирование равномерного распределения на $[0, 1]$.

В основу моделирования случайных величин, имеющих одно из стандартных распределений (т. е. для получения *псевдослучайных чисел*), можно положить генерирование значений случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$. К настоящему времени разработано много алгоритмов такого генерирования.

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке $[a, b]$* , если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a, b]; \\ c, & \text{если } x \in [a, b]. \end{cases} \quad (1)$$

График $p(x)$ изображен на рис. 1.

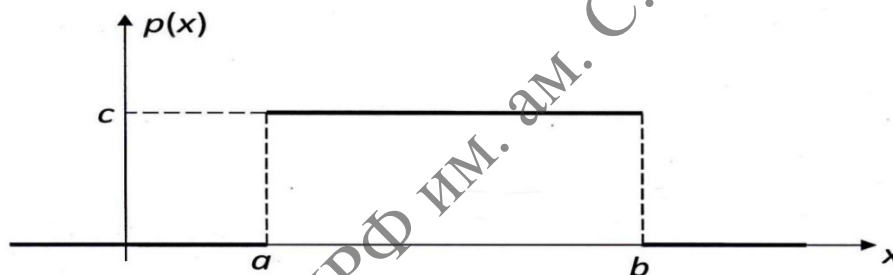


Рис. 1

Параметры X :

$$c = \frac{1}{b-a}; \quad M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

здесь $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a, b]$; $(b-a)$ — длина отрезка $[a, b]$.

Если x — сгенерированное значение равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$, то соответствующее значение для отрезка $[a, b]$ — это $(b-a)x + a$.

Метод середины квадрата. Последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на $[0, 1]$, строится рекуррентно:

- 1) произвольным образом выбирается рациональное число $x_0 \in (0, 1)$ — десятичная дробь с фиксированным четным количеством $2k$ знаков после запятой;
- 2) для получения очередного псевдослучайного числа x_{i+1} предыдущее x_i возводится в квадрат;

3) в качестве дробной части числа x_{i+1} берутся средние цифры дробной части числа x_i^2 — начиная с $(k+1)$ -й по $3k$ -ю.

Пример

Пусть $x_0 = 0,2061$. Последовательно получаем:

$$\begin{aligned}x_0^2 &= 0,04247721; & x_1 &= 0,2477; \\x_1^2 &= 0,06135529; & x_2 &= 0,1355; \\x_2^2 &= 0,01836025; & x_3 &= 0,8360; \\x_3^2 &= 0,69889600; & x_4 &= 0,8896; \\x_4^2 &= 0,48832144; & x_5 &= 0,8321; \\x_5^2 &= 0,23843689; & x_6 &= 0,8436; \\x_6^2 &= 0,71166096; & x_7 &= 0,1660; \\x_7^2 &= 0,02755600; & x_8 &= 0,7556; \\x_8^2 &= 0,57093136; & x_9 &= 0,0931; \\x_9^2 &= 0,00866761; & x_{10} &= 0,8667; \\x_{10}^2 &= 0,75116889; & x_{11} &= 0,1168; \\x_{11}^2 &= 0,01364224; & x_{12} &= 0,3642.\end{aligned}$$

1.2. Моделирование дискретной случайной величины с таблично заданным законом распределения.

Законом распределения дискретной случайной величины Z называется перечень всех ее возможных значений z_i и их вероятностей $p_i = P(Z = z_i)$: $(z_1, z_2, \dots, z_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Для реализации отдельного псевдослучайного значения z можно применить следующий алгоритм:

- отрезок $[0, 1]$ разбивается на частичные отрезки, длины которых равны заданным вероятностям:
 $\Delta_1 = [0, p_1), \Delta_2 = [p_1, p_1 + p_2), \dots, \Delta_n = [p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, 1]$;
- генерируется псевдослучайное число x , равномерно распределенное на $[0, 1]$;
- величине z присваивается значение z_i , если $x \in \Delta_i$.

Пример

Пусть распределение имеет вид $(2, 5, 8, 9; 0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$. Полученные в примере п. 1 значения x_i последовательно приводят к следующим значениям z : 2, 2, 2, 9, 9, 9, 9, 2, 9, 2, 5.

1.3. Моделирование дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Дискретная случайная величина A с бесконечным множеством значений распределена по *закону Пуассона с параметром* $\lambda > 0$, если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ с вероятностями

$$P(A = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Математическое ожидание $M(A) = \lambda$, дисперсия $D(A) = \lambda$.

Распределение Пуассона во многих случаях имеют случайные величины, описывающие работу систем массового обслуживания.

Реализацию отдельного псевдослучайного значения a можно осуществить по следующему алгоритму:

- генерируются псевдослучайные числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, равномерно распределенные на $[0, 1]$;
- последовательно вычисляются произведения $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots$ — до тех пор, пока не выполнится условие $x_1x_2\dots x_nx_{n+1} \leq e^{-\lambda} < x_1x_2\dots x_n$;
- в качестве значения a принимается число n ;
- если неравенству удовлетворяет первое из равномерно распределенных чисел x_1 , то $a = 0$.

Пример

Для $\lambda = 2$ имеем $e^{-2} \approx 0,1353$. Для полученных в примере п. 1 значений x_i последовательно получаем:

$$x_1 = 0,2477 > 0,1353;$$

$$x_1x_2 \approx 0,0335 < 0,1353; a = 1.$$

1.4. Моделирование дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Дискретная случайная величина Y распределена по биномиальному закону с параметрами n и p , если ее возможные значения

$$0, 1, 2, \dots, k, \dots, n-1, n$$

выражают число k успехов в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p , а соответствующие вероятности равны вероятностям числа успехов:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математическое ожидание $M(Y) = np$, дисперсия $D(Y) = npq$.

Реализацию отдельного псевдослучайного значения y можно осуществить по следующему алгоритму:

- фиксируется интервал $(\alpha, \alpha + p) \subset [0, 1]$;
- генерируются n псевдослучайных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, равномерно распределенных на $[0, 1]$;
- подсчитывается количество попаданий x_i чисел в интервал $(\alpha, \alpha + p)$.

Пример

Пусть $n = 4$, $p = 0,6$. Выбираем $\alpha = 0,2$ и фиксируем интервал $(0,2, 0,8)$. Используя полученные в примере п.1 значения x_1, x_2, x_3, x_4 , находим, что $k = 1$. Используя значения x_1, x_6, x_8, x_{12} , находим, что $k = 3$.

1.5. Моделирование непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Непрерывная случайная величина U имеет нормальное распределение (распределение Гаусса) с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание $M(U) = a$, дисперсия $D(U) = \sigma^2$.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальное распределение называется стандартным. Для стандартного распределения реализацию отдельного псевдослучайного значения u можно осуществить по следующему алгоритму:

- генерируются 12 псевдослучайных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, равномерно распределенных на $[0, 1]$;

- вычисляется их сумма $s = \sum_{i=1}^n x_i$;
- вычисляется $u = (s - n/2) \cdot \sqrt{n/12}$.

Для реализации отдельного значения $u_{a,\sigma}$ нормального распределения с параметрами a и σ после получения u применяется формула $u_{a,\sigma} = \sigma u + a$.

Пример

Используя полученные в примере п. 1 псевдослучайные числа $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, равномерно распределенные на $[0, 1]$, для стандартного нормального распределения получаем:

$$s = 6,1469; u = (6,1469 - 12/2) \cdot \sqrt{12/12} = 0,1669.$$

Используя это значение u для распределения с параметрами $a = -3$, $\sigma = 3,5$, получаем:

$$u_{a,\sigma} = 3,5 \cdot 0,1669 - 3 \approx -2,4159.$$

1.6. Моделирование непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону.

Непрерывная случайная величина V имеет *показательное распределение* с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(V) = \frac{1}{\lambda}$, дисперсия $D(V) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Получение отдельного псевдослучайного значения v при заданном λ можно осуществить по формуле $v = -(\ln x) / \lambda$, где x — реализованное псевдослучайное значение равномерного распределения на $[0, 1]$.

Пример

Используя полученные выше псевдослучайные значения x_1, x_2, x_3 равномерного распределения на $[0, 1]$, получаем три псевдослучайных значения для показательного распределения с параметром $\lambda = 2$:

$$v_1 = -(\ln(0,2477)) / 2 \approx 1,3955 / 2 \approx 0,6978;$$

$$v_2 = -(\ln(0,1355)) / 2 \approx 1,9988 / 2 \approx 0,9994;$$

$$v_3 = -(\ln(0,8360)) / 2 \approx 0,1791 / 2 \approx 0,0896.$$

Задания

1.1. Методом середины квадратов получить 12 псевдослучайных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ с четырьмя знаками после запятой, равномерно распределенных на $[0, 1]$, беря исходное значение x_0 из таблицы.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
x_0	0,2708	0,9342	0,1343	0,8631	0,7456	0,5324	0,9103	0,8746

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
x_0	0,2703	0,9142	0,5343	0,4621	0,7446	0,1532	0,7910	0,0874

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
x_0	0,2602	0,3102	0,4703	0,5623	0,5426	0,1033	0,5517	0,1089

№ варианта	25	26	27	28	29	30		
x_0	0,4612	0,2192	0,6704	0,1623	0,7476	0,1025		
№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
x_0	0,3708	0,1142	0,1545	0,7601	0,2458	0,4314	0,7204	0,5742

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
x_0	0,6711	0,7102	0,5113	0,2291	0,3346	0,4553	0,7417	0,2875

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
x_0	0,2614	0,3132	0,5723	0,5021	0,1426	0,1531	0,6617	0,3081

№ варианта	55	56	57	58	59	60
x_0	0,4782	0,2991	0,2714	0,1426	0,6655	0,4324

1.2. Используя псевдослучайные числа x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 , полученные при выполнении первого задания, получить пять псевдослучайных чисел z с таблично заданным законом распределения (1, 2, 3, 4; p_1, p_2, p_3, p_4).

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
p_1	0,2	0,1	0,25	0,3	0,35	0,45	0,2	0,25
p_2	0,3	0,65	0,4	0,1	0,1	0,2	0,3	0,25
p_3	0,35	0,2	0,2	0,2	0,2	0,25	0,3	0,1
p_4	0,15	0,05	0,15	0,4	0,35	0,1	0,2	0,4

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
p_1	0,1	0,2	0,25	0,3	0,35	0,45	0,2	0,1
p_2	0,3	0,55	0,45	0,1	0,1	0,1	0,4	0,1
p_3	0,35	0,05	0,1	0,25	0,2	0,25	0,2	0,3
p_4	0,25	0,2	0,2	0,35	0,35	0,2	0,2	0,5

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
p_1	0,4	0,2	0,25	0,3	0,35	0,45	0,2	0,15
p_2	0,3	0,55	0,35	0,2	0,3	0,3	0,4	0,05
p_3	0,05	0,15	0,1	0,15	0,1	0,05	0,1	0,3
p_4	0,25	0,1	0,3	0,35	0,25	0,2	0,3	0,5

№ варианта	25	26	27	28	29	30
p_1	0,1	0,25	0,2	0,2	0,1	0,6
p_2	0,3	0,5	0,4	0,3	0,6	0,1
p_3	0,25	0,05	0,25	0,4	0,2	0,1
p_4	0,35	0,2	0,15	0,1	0,1	0,2

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
p_1	0,15	0,15	0,25	0,3	0,15	0,25	0,2	0,25
p_2	0,3	0,6	0,4	0,1	0,3	0,2	0,3	0,25
p_3	0,35	0,2	0,3	0,25	0,2	0,45	0,3	0,2
p_4	0,2	0,05	0,05	0,35	0,35	0,1	0,2	0,3

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
p_1	0,2	0,1	0,3	0,25	0,35	0,45	0,2	0,3
p_2	0,2	0,55	0,4	0,15	0,2	0,15	0,4	0,1
p_3	0,35	0,05	0,1	0,25	0,2	0,2	0,25	0,3
p_4	0,25	0,3	0,2	0,35	0,25	0,2	0,15	0,2

№ варианта	47	48	49	40	41	42	43	44
p_1	0,3	0,7	0,25	0,3	0,35	0,45	0,2	0,15
p_2	0,4	0,05	0,35	0,2	0,3	0,3	0,3	0,05
p_3	0,05	0,15	0,05	0,15	0,1	0,05	0,2	0,2
p_4	0,25	0,1	0,35	0,35	0,25	0,2	0,3	0,6

№ варианта	45	46	47	48	49	50
p_1	0,15	0,05	0,2	0,2	0,1	0,55
p_2	0,3	0,7	0,5	0,3	0,6	0,05
p_3	0,2	0,05	0,25	0,4	0,2	0,2
p_4	0,35	0,2	0,05	0,1	0,1	0,2

1.3. Используя псевдослучайные числа $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, полученные при выполнении первого задания, получить псевдослучайное число a , распределенное по закону Пуассона с параметром λ . Для вычисления экспоненты использовать онлайн-калькулятор.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
λ	2,37	2,11	2,33	3,00	3,02	1,85	1,97	3,03

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	1,94	2,01	3,54	3,45	2,28	3,72	2,85	2,44
№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
λ	3,32	4,00	3,98	1,02	3,73	3,38	2,05	3,11

№ варианта	25	26	27	28	29	30
λ	2,94	3,85	4,02	2,77	1,89	2,87

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
λ	4,07	5,11	1,03	3,05	6,02	8,82	1,97	4,13

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
λ	5,64	3,06	3,14	7,45	6,08	3,79	2,95	3,04

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
λ	3,12	4,00	3,98	1,02	3,73	3,38	2,05	3,11

№ варианта	55	56	57	58	59	60
λ	6,94	1,75	5,12	6,17	2,83	3,12

1.4. Поочередно используя четыре равномерно распределенных числа $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$ ($i = 1, 5, 8$) из совокупности, полученной при выполнении первого задания, получить шесть псевдослучайных чисел y , распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и p , считая успехом попадание x_i в отрезок $[0, p]$.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0,6	0,3	0,4	0,7	0,8	0,5	0,5	0,4

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
p	0,2	0,1	0,5	0,4	0,9	3,72	0,8	0,4

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
p	0,3	0,9	0,3	0,9	0,6	0,3	0,4	0,7

№ варианта	25	26	27	28	29	30
p	0,7	0,5	0,3	0,25	0,6	0,5

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
p	0,55	0,2	0,4	0,2	0,7	0,4	0,5	0,4

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
p	0,6	0,8	0,5	0,4	0,9	3,8	0,9	0,4

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
p	0,3	0,9	0,3	0,9	0,6	0,3	0,4	0,7

№ варианта	55	56	57	58	59	60
p	0,4	0,2	0,3	0,15	0,6	0,45

1.5. Используя равномерно распределенные псевдослучайные числа $x_1, x_2, \dots, x_{12}$, полученные при выполнении первого задания, получить псевдослучайное число u , распределенное по нормальному закону с параметрами a и σ . u

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
a	5	-2	4	3	15	4	1	-7
σ	6	34	51	1	7	4	5	5

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
a	-5	2	-4	-1	3	9	-9	-8
σ	2	3	7	12	60	3	0,3	0,2

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
a	-4	5	3	-2	4	-4	9	-7
σ	0,9	0,65	0,4	0,7	6	2	0,6	0,5

№ варианта	25	26	27	28	29	30		
a	2	1	-5	-3	-5	4		
σ	50	10	7	42	5	5		
№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
a	-2	-2	-4	6	9	4	-1	-7
σ	0	33	5	11	1	1	5	5

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
a	-4	2	-6	-1	-10	5	-9	-1
σ	2	5	6	1	10	3	0,7	6

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
a	-14	5	13	-2	7	-5	-3	-6
σ	0,1	0,3	0,4	0,4	6	2	0,6	0,5

№ варианта	55	56	57	58	59	60
a	22	1	-5	-3	-4	3
σ	5	15	8	4	5	-5

1.6. Используя числа x_2, x_4, x_{11}, x_{12} , полученные при выполнении первого задания, получить четыре псевдослучайных числа v , распределенных по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Для вычисления натурального логарифма использовать онлайн-калькулятор.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Случайным процессом (случайной функцией) называется семейство случайных величин X_t , зависящих от параметра t .

В практических приложениях в роли t обычно (но необязательно) выступает время.

Если множество значений параметра t («моментов времени») счетно или конечно (перенумеровано натуральным рядом или его отрезком), то случайный процесс называется *процессом с дискретным временем*, или просто *дискретным*.

Случайный процесс X_t называется *непрерывным*, если выполняются два условия:

- 1) параметр t принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка (обычно $t \in [0, T]$ или $t \in [0, +\infty)$);
- 2) при каждом значении t случайная величина X_t является непрерывной.

Сечением случайного процесса X_t , соответствующим фиксированному значению t_0 параметра t , называется случайная величина X_{t_0} .

Для статистического изучения одного сечения необходимо многократно реализовать значения этой случайной величины при $t = t_0$.

Реализацией (траекторией, выборочной функцией) случайного процесса X_t называется (неслучайная) функция $x(t)$, для которой при любом t : $x(t) = X_t$ — реализованное в данном испытании значение случайной величины X_t .

Для получения реализации $x(t)$ нужно осуществить испытание, в результате которого все случайные величины X_t примут какое-либо значение.

Отдельная случайная величина X характеризуется неслучайными числами: математическим ожиданием $M(X)$, дисперсией $D(X)$ и т. д. Взаимовлияние пары случайных величин X и Y характеризуется корреляционным моментом

$$\mu(X, Y) = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y)))$$

и коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\mu(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

где σ_X, σ_Y — средние квадратические отклонения.

Аналогично этому, случайный процесс X_t характеризуется неслучайными функциями аргумента t , каждое значение которых при $t = t_0$ выражает соответствующую характеристику случайной величины, которая является сечением X_{t_0} . При этом пары взаимовлияющих случайных величин доставляются сечениями X_{t_1}, X_{t_2} для двух различных значений параметра t .

Математическим ожиданием случайного процесса X_t называется функция $m_X(t)$ аргумента t , задаваемая формулой:

$$m_X(t) = M(X_t).$$

Геометрически график функции $m_X(t)$ задает «среднюю кривую», вокруг которой расположены графики отдельных реализаций (рис. 2).

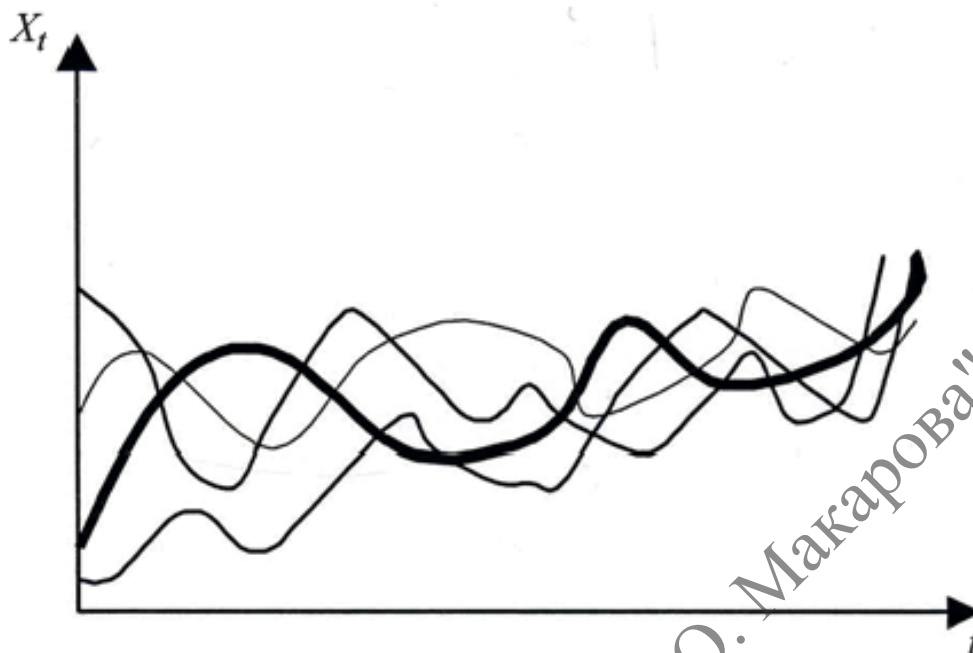


Рис. 2

Дисперсией случайного процесса X_t называется функция $D_X(t)$ аргумента t , задаваемая формулой:

$$D_X(t) = D(X_t).$$

Дисперсия процесса характеризует степень рассеяния графиков возможных реализаций $x(t)$ вокруг средней кривой.

Средним квадратическим отклонением случайного процесса X_t называется функция $\sigma_X(t)$ аргумента t , задаваемая формулой:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D(X_t)}.$$

Если задан случайный процесс X_t , и X_{t_1}, X_{t_2} — случайные величины, являющиеся сечениями процесса для произвольно взятых значений параметра t_1 и t_2 , то для них можно вычислить корреляционный момент $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух переменных $K_X(t_1, t_2)$, задаваемая формулой:

$$K_X(t_1, t_2) = \mu(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Примеры

2.1. Пусть $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ — дискретный случайный процесс, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = 3/t$. Проводя для каждого из пяти сечений (т. е. отдельно

для $t = 1, 2, 3, 4, 5$) четыре реализации показательного закона с параметром $\lambda_t = 3/t$ (см. п. 6 «Теоретических сведений» в лабораторной работе № 1) и беря для этого из таблицы 1 первые двадцать псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на $[0, 1]$.

Таблица 1

Случайные числа, равномерно распределенные на $[0, 1]$

0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,5300	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,688	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,823	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971
0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,049	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387

получаем:

– для сечения V_1 :

$$v_1^{(1)} = 0,2393; v_2^{(1)} = 0,6692; v_3^{(1)} = 0,2758; v_4^{(1)} = 0,1163;$$

– для сечения V_2 :

$$v_1^{(2)} = 0,0108; v_2^{(2)} = 0,0402; v_3^{(2)} = 0,4308; v_4^{(2)} = 0,4351;$$

– для сечения V_3 :

$$v_1^{(3)} = 1,2063; v_2^{(3)} = 0,5920; v_3^{(3)} = 3,1212; v_4^{(3)} = 0,6348;$$

– для сечения V_4 :

$$v_1^{(4)} = 3,7161; v_2^{(4)} = 0,8975; v_3^{(4)} = 0,4670; v_4^{(4)} = 0,8392;$$

– для сечения V_5 :

$$v_1^{(5)} = 0,0256; v_2^{(5)} = 0,6232; v_3^{(5)} = 8,5546; v_4^{(5)} = 3,0172.$$

Выборочные значения математических ожиданий сечений:

$$m_1 = 0,3251; m_2 = 0,2292; m_3 = 1,3885;$$

$$m_4 = 1,4799; m_5 = 3,0551.$$

Выборочные значения дисперсий сечений:

$$d_1 = 0,0429; d_2 = 0,0416; d_3 = 1,0594;$$

$$d_4 = 1,6940; d_5 = 11,3343.$$

Выборочные значения средних квадратических отклонений сечений:

$$\sigma_1 = 0,2071, \sigma_2 = 0,2039, \sigma_3 = 1,0292,$$

$$\sigma_4 = 1,3015, \sigma_5 = 3,3666.$$

2.2. Пусть случайный процесс с непрерывным временем $A_t, t \geq 0$ имеет вид $A_t = X_t + Y_t + Z_t$, где слагаемые независимы, X_t распределено по показательному закону с параметром $\lambda(t) = 2t + 3$, Y_t — по нормальному закону с параметрами $a(t) = \frac{1}{t^2}$, $\sigma(t) = 2t$, Z_t — равномерно на отрезке $[\alpha(t), \beta(t)] = [3t, 11t]$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию процесса A_t . Имеем:

$$m_X(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{1}{2t+3}, D_X(t) = \frac{1}{(\lambda(t))^2} = \frac{1}{(2t+3)^2};$$

$$m_Y(t) = a(t) = \frac{1}{t^2}, D_Y(t) = \sigma(t)^2 = 4t^2;$$

$$m_Z(t) = (\alpha(t) + \beta(t)) / 2 = 7t, D_Z(t) = \frac{(\beta(t) - \alpha(t))^2}{12} = \frac{16t^2}{3}.$$

Применяя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$m_A(t) = m_X(t) + m_Y(t) + m_Z(t) = \frac{1}{2t+3} + \frac{1}{t^2} + 7t;$$

$$D_A(t) = D_X(t) + D_Y(t) + D_Z(t) = \frac{1}{(2t+3)^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{16t^2}{3}.$$

Задания

2.1. Осуществить три реализации дискретного случайного процесса $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, сечения которого V_i имеют показательное распределение с параметром $\lambda_i = 5 / kt$, беря для этого из таблицы 1 двенадцать псевдослучайных чисел, с i -го по $i + 11$ -е.

2.2. Осуществить три реализации дискретного случайного процесса $\{G_1, G_2, G_3\}$, сечения которого G_i имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda_i = c / kt$, беря для этого из таблицы 1 псевдослучайные числа, начиная с j -го.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
k	4	6	5	7	5	2	4	3
c	3	2	3	5	4	6	1	3
i	11	71	81	131	141	81	61	21
j	101	51	41	171	31	1	11	81
№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16

k	5	6	5	7	5	2	4	3
c	3	4	3	5	4	6	1	3
i	91	71	81	151	141	81	41	161
j	101	51	31	171	31	1	11	81

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
k	5	3	5	7	5	2	4	3
c	3	4	3	4	4	6	1	3
i	91	71	141	121	71	51	91	101
j	101	21	31	71	131	1	11	81

№ варианта	25	26	27	28	29	30
k	6	5	2	4	3	0,6
c	5	2	6	1	2	4
i	101	111	83	41	161	21
j	11	41	5	11	31	151

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
k	4	36	15	10	2	2	4	3
c	3	2	3	5	4	6	1	3
i	11	20	81	131	141	81	61	21
j	70	5	41	121	31	1	11	81

№ варианта	3	30	41	42	43	44	45	46
k	5	6	5	7	5	2	4	3
c	3	4	3	5	4	6	12	3
i	91	71	81	151	141	81	41	161
j	85	51	31	171	31	1	11	81

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
k	15	5	5	7	5	2	4	3
c	2	14	3	4	4	6	1	3
i	91	71	141	121	71	51	91	101
j	101	21	31	71	131	1	11	81

№ варианта	55	56	57	58	59	60
k	6	5	2	4	3	0,6
c	13	2	4	5	2	4
i	83	111	40	35	150	21
j	11	41	1	16	30	106

Найти математическое ожидание $m_A(t)$ и дисперсию $D_A(t)$ процесса A_t ($A_t = kX_t + cY_t + kZ_t$), в котором слагаемые независимы, X_t распределено по показательному закону с параметром $\lambda(t) = kt$, Y_t — по нормальному закону с параметрами $a(t) = \frac{c}{t^2}$, $\sigma(t) = 2ct$, Z_t — равномерно на отрезке $[\alpha(t), \beta(t)] = [it, (i+j)t]$.

ЦЕПИ МАРКОВА. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ

Теоретические сведения

Последовательность испытаний $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$, в которых число k исходов $A_i^{(n)}$ одинаково ($k \geq 3$) либо счетно ($k = \infty$):

$$I_n: (A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_i^{(n)}, \dots),$$

образует *цепь Маркова*, если для любых номеров испытаний

$$n > n_1 > n_2 > \dots > n_l$$

и для любых номеров исходов этих испытаний

$$i, i_1, i_2, \dots, i_l$$

имеет место равенство условных вероятностей:

$$P(A_i^n / A_{i_1}^{n_1} A_{i_2}^{n_2} \dots A_{i_l}^{n_l}) = P(A_i^n / A_{i_1}^{n_1}). \quad (1)$$

Содержательно условие (1) означает, что условные вероятности зависят только от исходов последнего из предшествующих испытаний. Если трактовать значения n как моменты времени:

$$n \text{ (будущее)} > n_1 \text{ (настоящее)} > n_2 \text{ (прошлое)},$$

то (1) означает, что «прошлое не влияет на будущее при фиксированном настоящем».

Возможные исходы $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_k^{(n)}$ n -го испытания трактуют как возможные состояния системы в момент времени n .

Переходными вероятностями (вероятностями перехода цепи Маркова) за один шаг называются условные вероятности

$${}_n P_{ij} = P(A_j^n / A_i^{n-1}).$$

Их трактуют как вероятности перехода из состояния i в состояние j в момент времени n (или на шаге n).

Цепь Маркова называется *однородной*, если вероятности перехода не зависят от n : ${}_n P_{ij} = P_{ij}$. Содержательно условие однородности означает, что *вероятностный механизм переходов системы не меняется со временем*.

Далее будут рассматриваться только однородные цепи Маркова.

Для переходных вероятностей выполняются условия: $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$. Последнее равенство означает, что система в следующий момент обязательно перейдет в некоторое состояние, так что данная сумма выражает вероятность достоверного события.

Переходные вероятности за один шаг образуют матрицу $P = P^{(1)} = (p_{ij})$.

Матрица вероятностей перехода за m шагов образована условными вероятностями: $P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)}) = (P(A_j^m / A_i^{m-m}))$. Имеет место равенство $P^{(m)} = P^m$, т. е. матрица вероятностей перехода за m шагов является m -й степенью матрицы вероятностей перехода за один шаг.

Начальное распределение вероятностей состояний однородной цепи Маркова с k состояниями в момент $n = 0$ задается строкой $p(0) = (p_1, \dots, p_k)$, где $p_i \geq 0$, $p_1 + \dots + p_k = 1$. После первого перехода в момент $n = 1$ распределение вероятностей состояний задается вектором $p(1) = p(0) \cdot P$ (произведение строки на матрицу); после второго шага распределение вероятностей состояний $p(2) = p(0) \cdot P^2 = p(1) \cdot P$ и т. д.

Состояние A_j достижимо за t шагов из состояния A_i , если $p_{ij}^{(t)} > 0$. Состояния A_i и A_j являются *сообщающимися* за t шагов, если они достижимы друг из друга: $p_{ij}^{(t)} > 0$ и $p_{ji}^{(t)} > 0$. Состояние A_j называется *несущественным*, если при некотором t $p_{jl}^{(t)} > 0$, но при всех $t=1, 2, 3, \dots$ $p_{lj}^{(t)} = 0$ (система, выйдя однажды из состояния A_j , больше никогда в него не вернется). Состояние A_j называется *поглощающим*, если $p_{jj} = 1$.

Пример

Однородная цепь Маркова имеет четыре состояния и переходит с равными вероятностями из состояния i в достижимые из него за один шаг состояния ($i=1, 2, 3, 4$) (рис. 3).

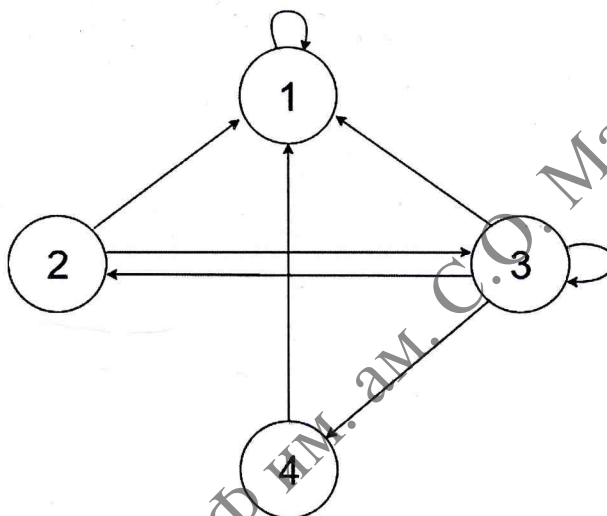


Рис. 3

Матрица переходных вероятностей за один шаг:

$$P^{(1)} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вероятностей перехода за два шага является квадратом матрицы P :

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/8 & 8 \\ 11/16 & 1/16 & 3/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица вероятностей перехода за три шага является третьей степенью матрицы P :

$$P^{(3)} = P^3 = P^2 P =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 11/16 & 1/16 & 3/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 27/32 & 1/32 & 5/64 & 3/64 \\ 53/64 & 3/64 & 5/64 & 3/64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

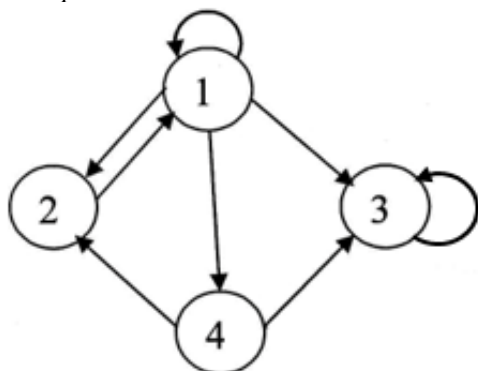
Состояния A_2 и A_3 являются сообщающимися за три шага, поскольку $p_{23}^{(3)} = 5/64 > 0$, $p_{32}^{(3)} = 3/64 > 0$. Состояние A_1 достижимо из состояния A_3 за два шага, поскольку $p_{31}^{(2)} = 1/16 > 0$, в то время как состояние A_3 не достижимо из состояния A_1 ни за один, ни за два, ни за три шага: $p_{13} = p_{13}^{(2)} = p_{13}^{(3)} = 0$. Состояние A_1 является поглощающим, поскольку $p_{11} = 1$. Состояние A_2 является несущественным, поскольку $p_{21} = 1/2 > 0$, но для любой степени P^m исходной матрицы P выполняется $p_{12}^{(m)} = 0$.

Задание

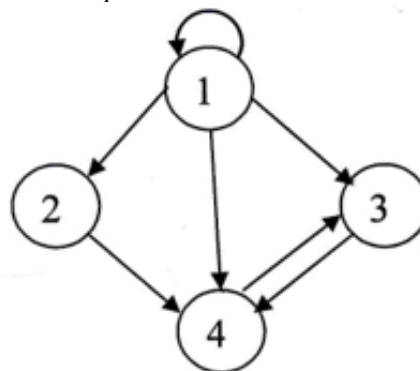
Однородная цепь Маркова имеет четыре состояния (см. рисунки к заданию ниже) и переходит с равными вероятностями $1/k$ из состояния i в достижимые из него за один шаг состояния $j_1, \dots, j_k$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

- 1) Построить матрицы переходных вероятностей: $P^{(1)}$ — за один шаг, $P^{(2)}$ — за два шага и $P^{(3)}$ — за три шага.
- 2) Найти поглощающие состояния.
- 3) Найти достижимые состояния по матрицам $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$.
- 4) Найти сообщающиеся состояния по матрицам $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$.
- 5) Найти несущественные состояния по матрицам $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$.
- 5) Найти несущественные состояния по матрицам $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$.

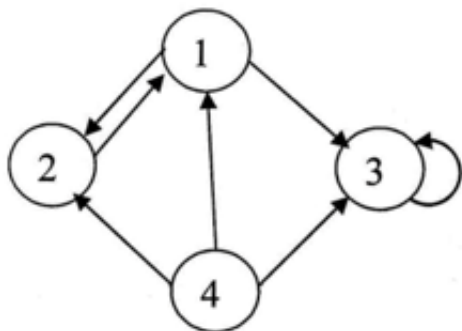
Вариант 1



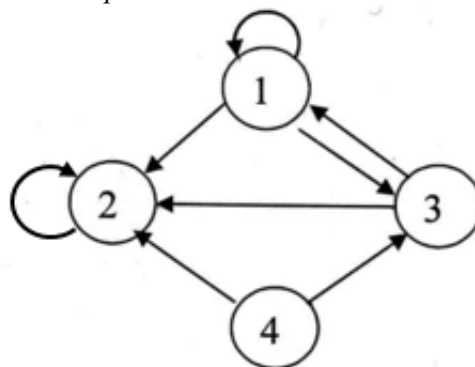
Вариант 2



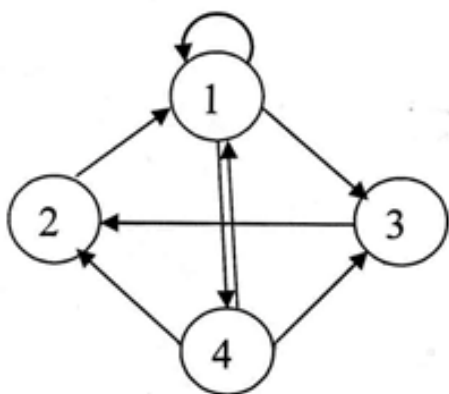
Вариант 3



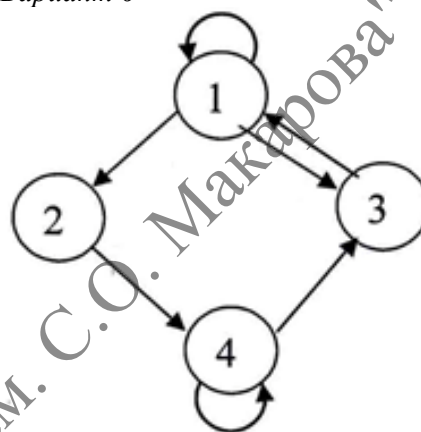
Вариант 4



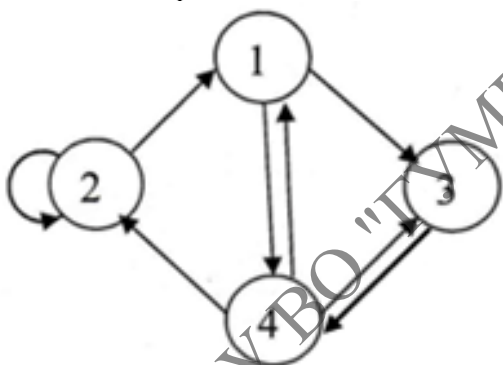
Вариант 5



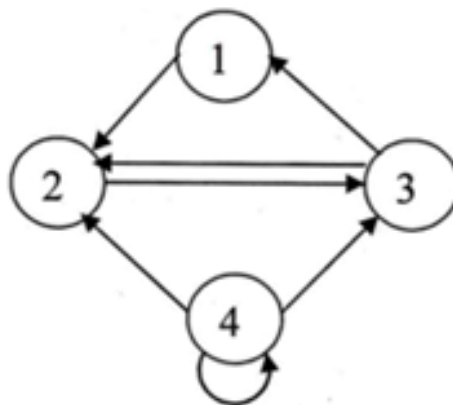
Вариант 6



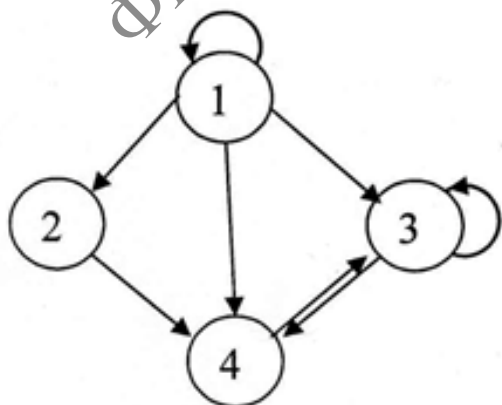
Вариант 7



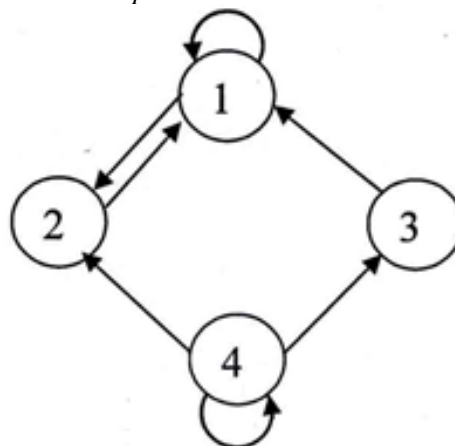
Вариант 8



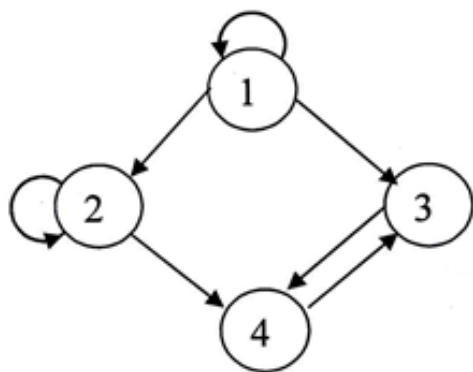
Вариант 9



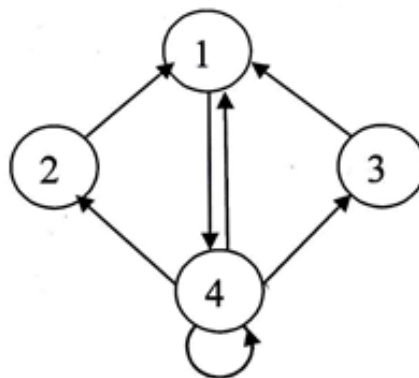
Вариант 10



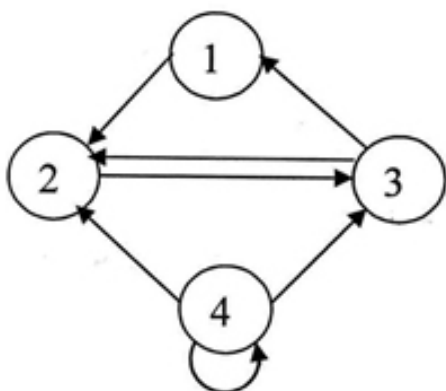
Вариант 11



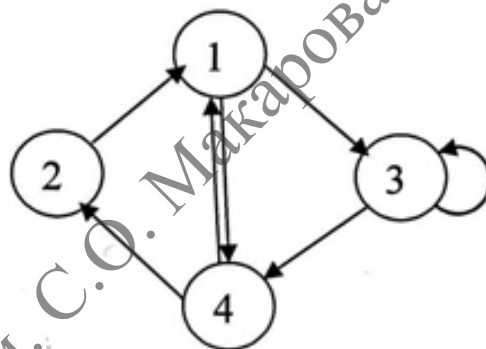
Вариант 12



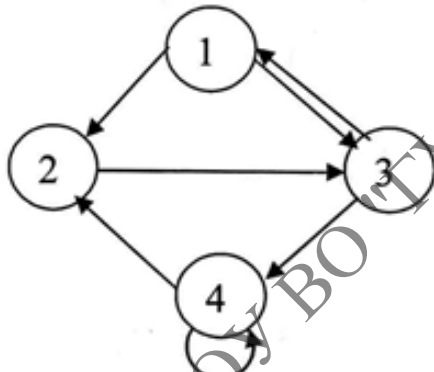
Вариант 13



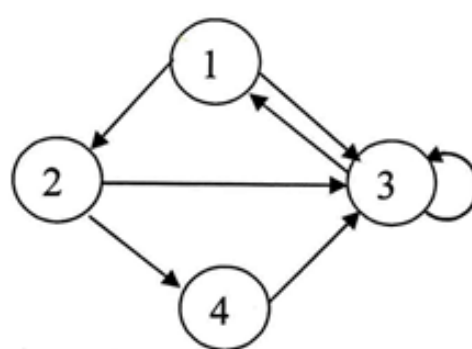
Вариант 14



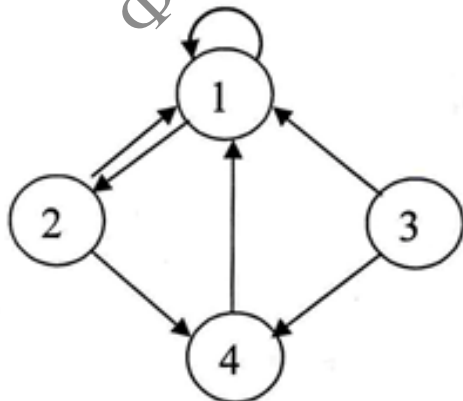
Вариант 15



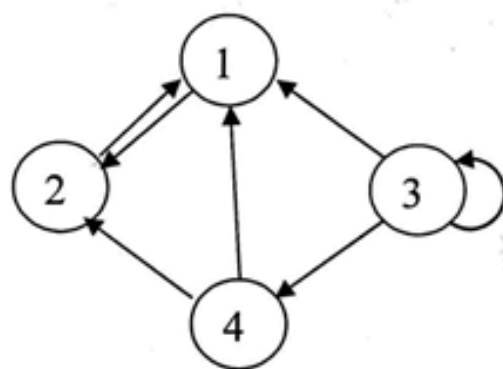
Вариант 16



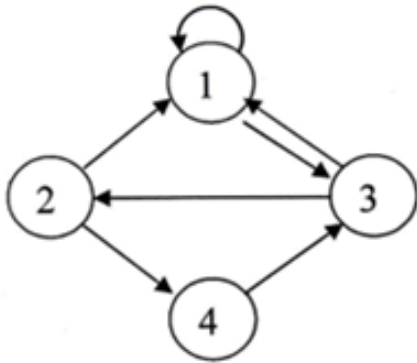
Вариант 17



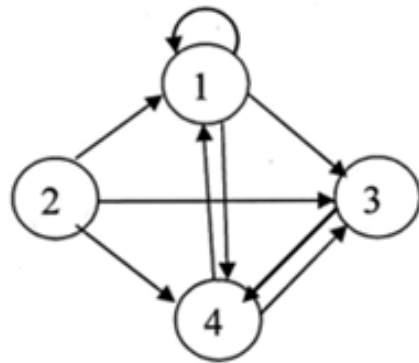
Вариант 18



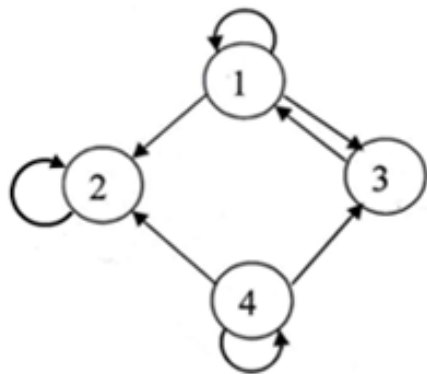
Вариант 19



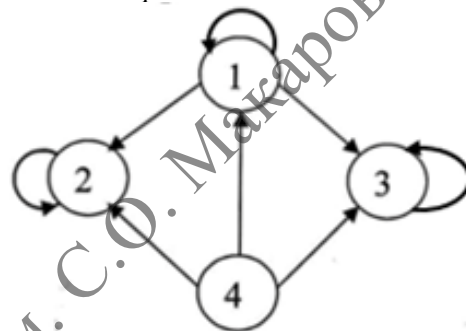
Вариант 20



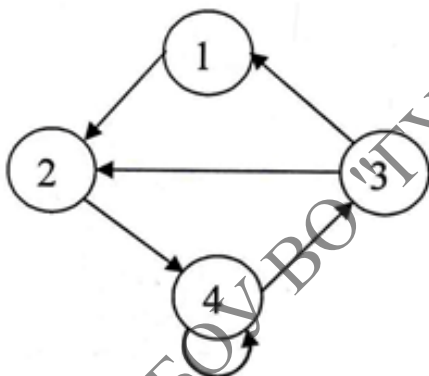
Вариант 21



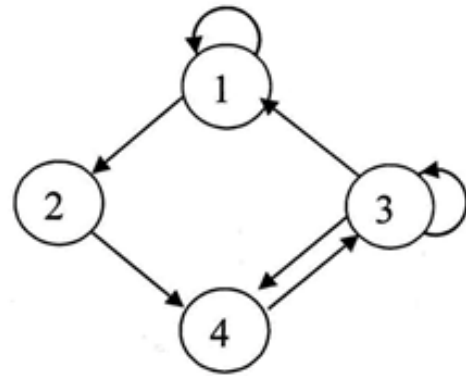
Вариант 22



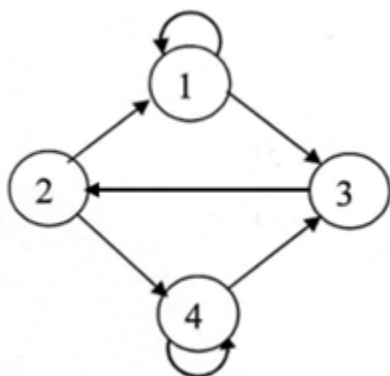
Вариант 23



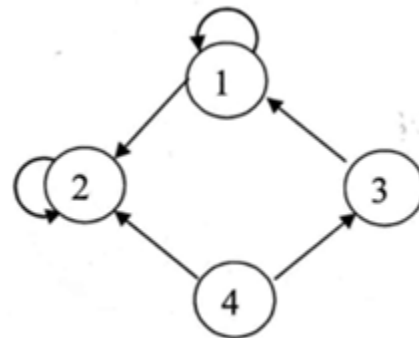
Вариант 24



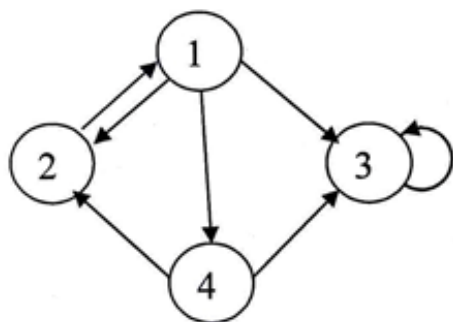
Вариант 25



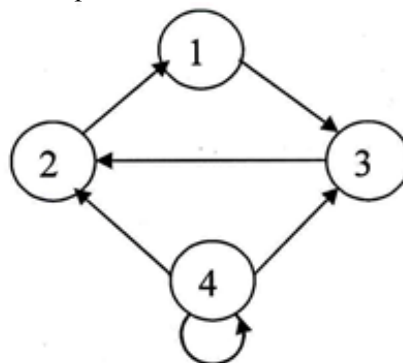
Вариант 26



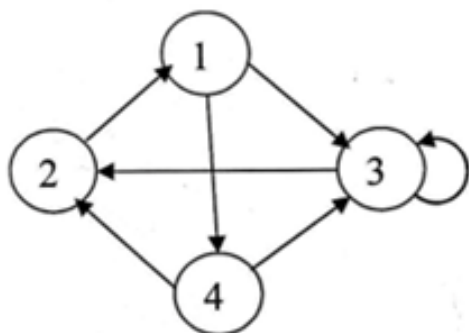
Вариант 27



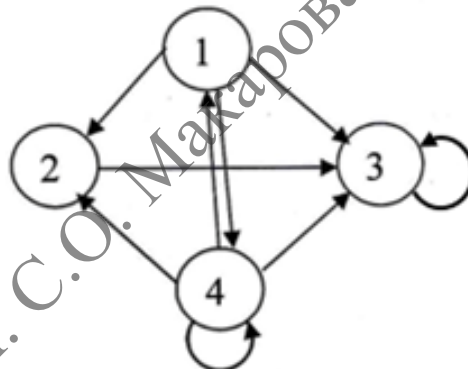
Вариант 28



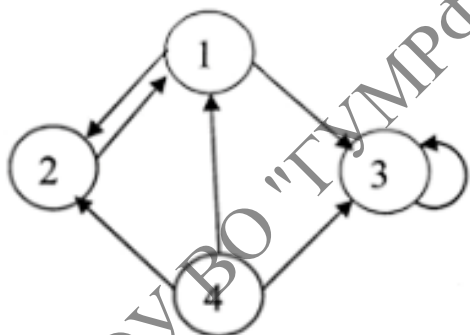
Вариант 29



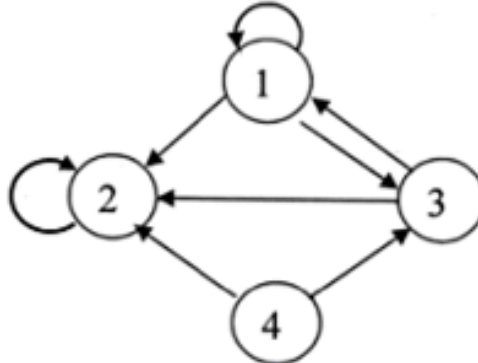
Вариант 30



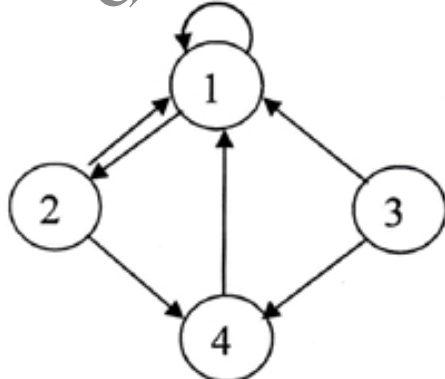
Вариант 31



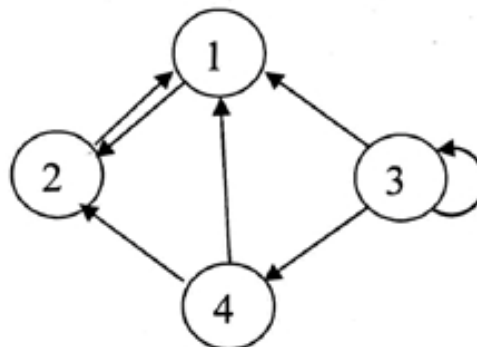
Вариант 32



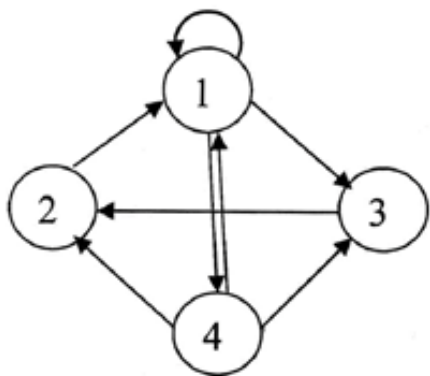
Вариант 33



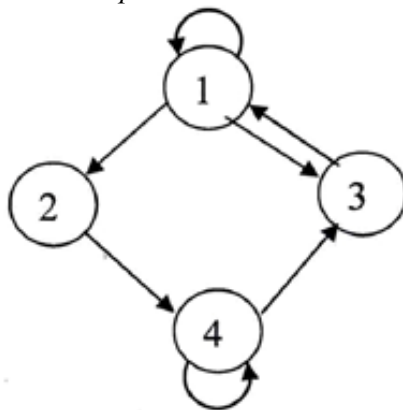
Вариант 34



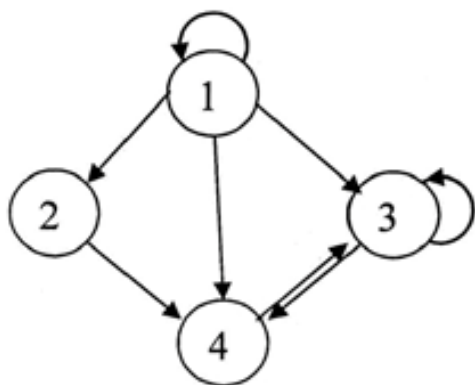
Вариант 35



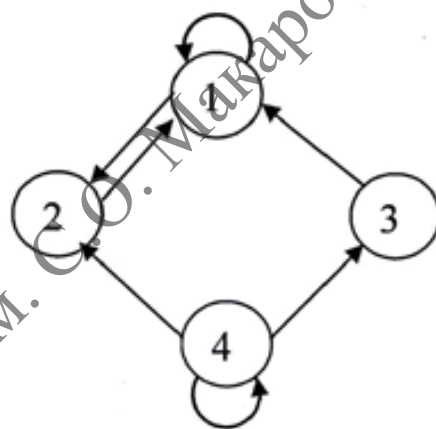
Вариант 36



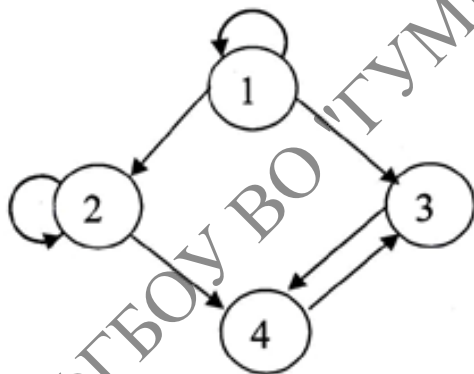
Вариант 37



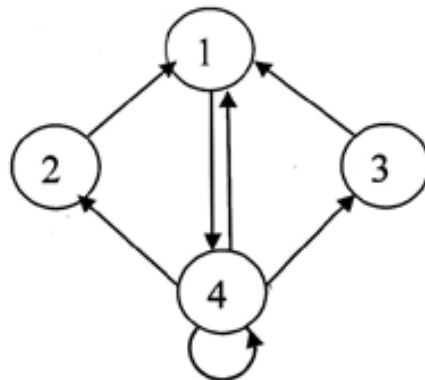
Вариант 38



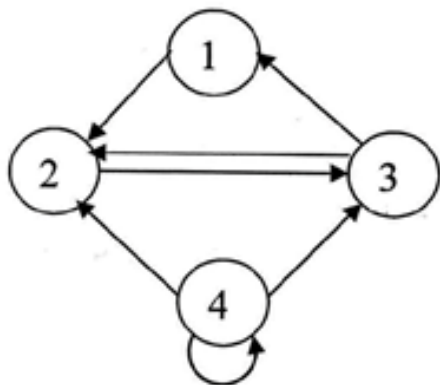
Вариант 39



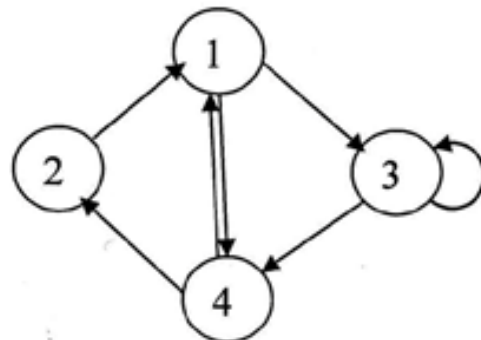
Вариант 40



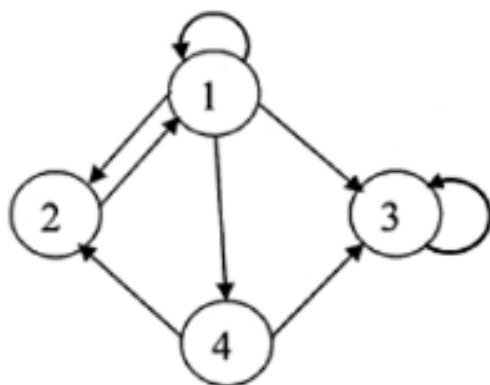
Вариант 41



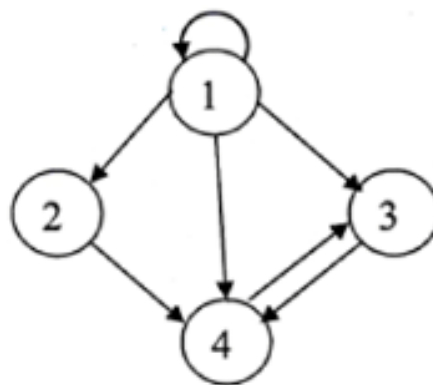
Вариант 42



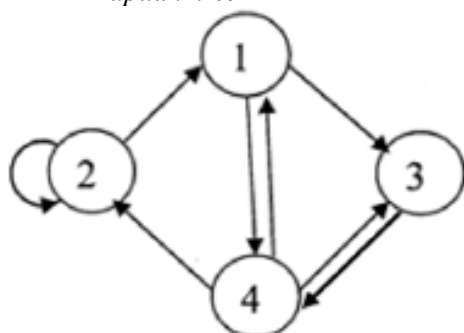
Вариант 43



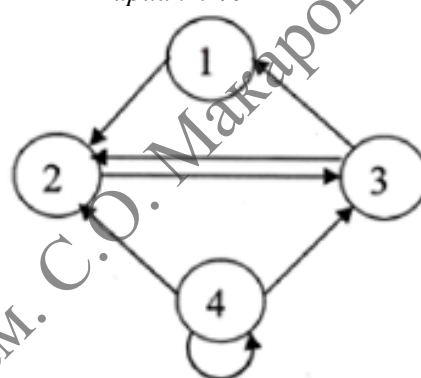
Вариант 44



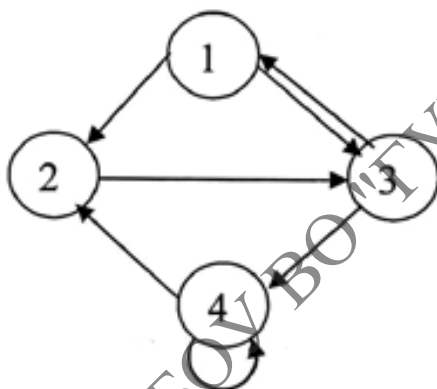
Вариант 45



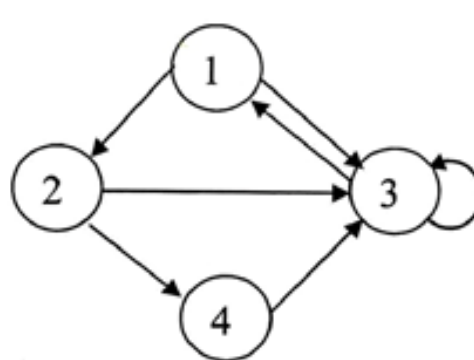
Вариант 46



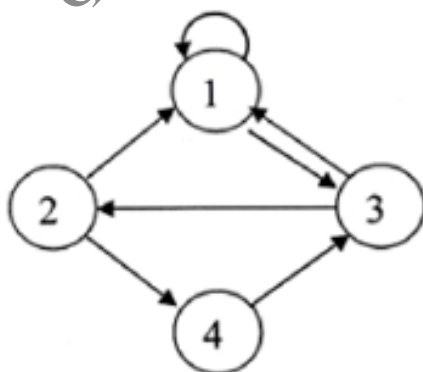
Вариант 47



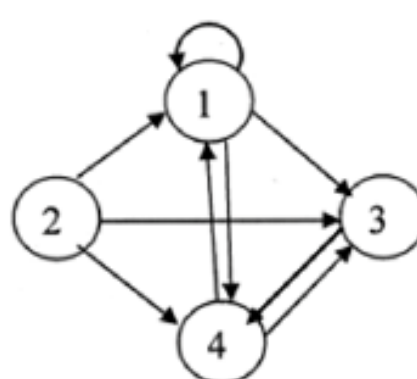
Вариант 48



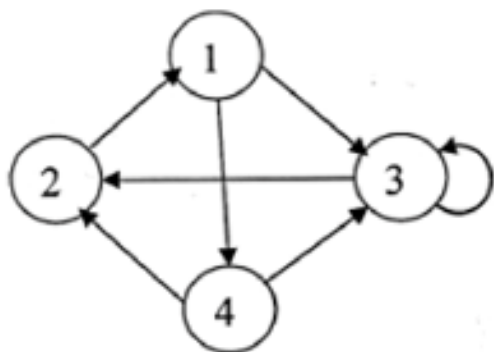
Вариант 49



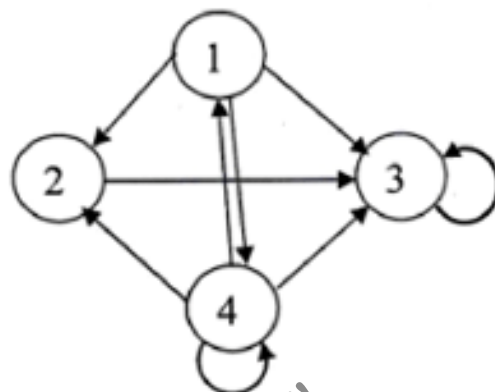
Вариант 50



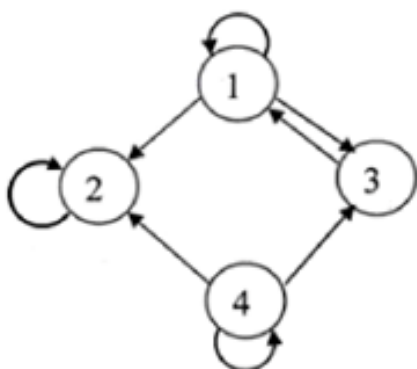
Вариант 51



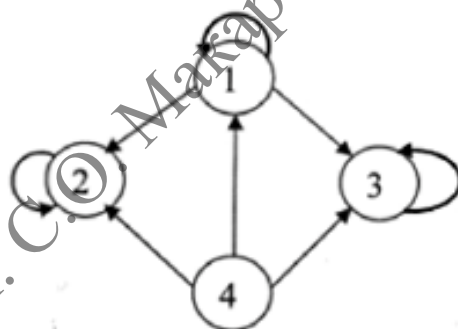
Вариант 52



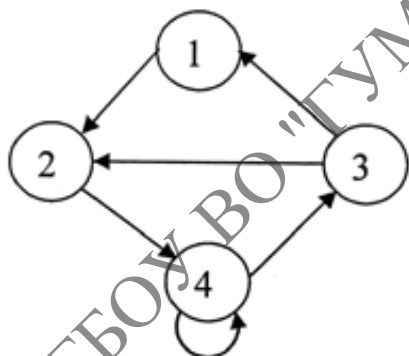
Вариант 53



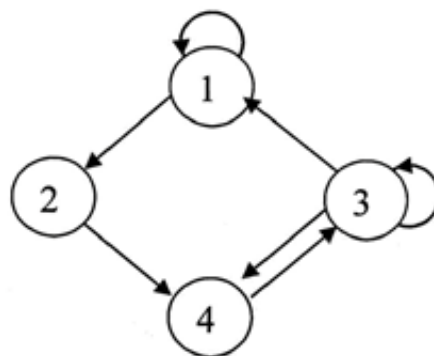
Вариант 54



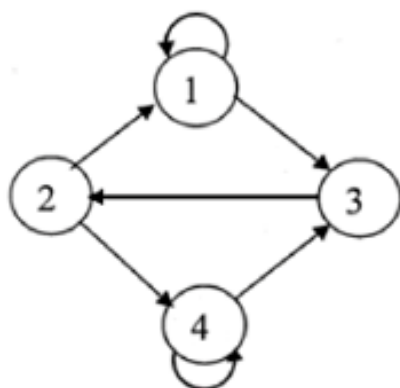
Вариант 55



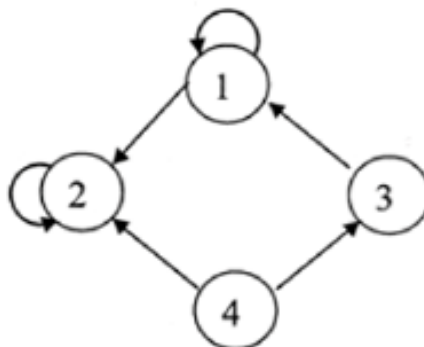
Вариант 56



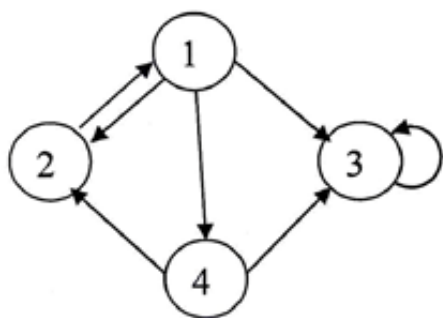
Вариант 57



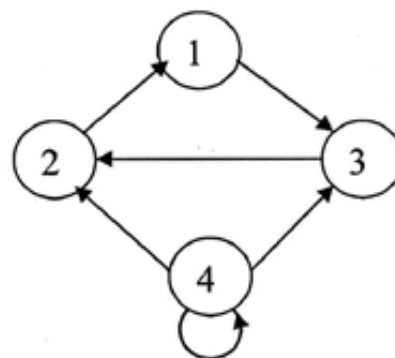
Вариант 58



Вариант 59



Вариант 60



ФГБОУ ВО "ТУМРФ им. ака. С.О. Макарова"

ЦЕПИ МАРКОВА. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

Теоретические сведения

Начальное распределение вероятностей состояний однородной цепи Маркова с k состояниями в момент $n = 0$ задается вектором $p(0) = (p_1, \dots, p_k)$, где $p_i^{(0)} \geq 0$, $p_1^{(0)} + \dots + p_k^{(0)} = 1$. После первого перехода в момент $n = 1$ распределение вероятностей состояний задается вектором $p(1) = p(0) \cdot P$; после второго шага — вектором $p(2) = p(0) \cdot P^2 = p(1) \cdot P$ и т. д.

Пример

Матрица

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & \beta & 0 \\ 0,1 & \alpha & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

является матрицей вероятностей перехода, если сумма элементов каждой строки равна 1, т. е. равна вероятности достоверного события (в какое-либо состояние система на очередном шаге обязательно перейдет). Поэтому $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,5$.

Ориентированный взвешенный граф состояний системы имеет вид (рис. 4):

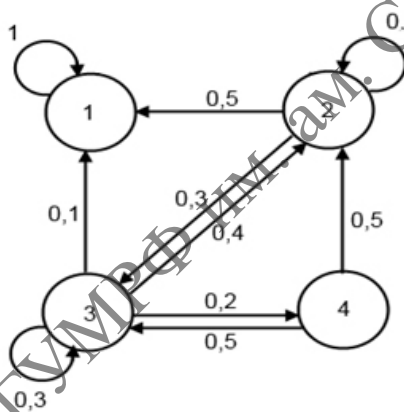


Рис. 4

Поглощающим является 1-е состояние, потому что из него невозможно («возможно с нулевой вероятностью») перейти в какое-либо другое состояние.

При начальном распределении вероятностей состояний цепи Маркова $p(0) = (0,1, 0,3, 0,2, 0,4)$ распределение вероятностей состояний после первого шага

$$p(1) = p(0) \cdot P^{(1)} = (0,1, 0,3, 0,2, 0,4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = (0,27, 0,34, 0,35, 0,04).$$

После второго шага распределение вероятностей состояний

$$p(2) = p(1) \cdot P^{(1)} = (0,27, 0,34, 0,35, 0,04) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = (0,475, 0,228, 0,227, 0,070).$$

После третьего шага распределение вероятностей состояний

$$p(3) = p(2) \cdot P^{(1)} = (0,475, 0,228, 0,227, 0,070) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \\ = (0,6117, 0,1714, 0,1715, 0,0454).$$

Задание

Дана матрица вероятностей перехода за один шаг $P^{(1)}$ для системы с четырьмя возможными состояниями.

- 1) Найти α , β и γ .
- 2) Построить ориентированный взвешенный граф состояний этой системы (веса ребер равны вероятностям, ребра с нулевыми весами не показываются).
- 3) Найти поглощающие состояния.
- 4) По заданному начальному распределению $p(0)$ найти распределение вероятностей по состояниям: $p(1)$ — после первого шага, $p(2)$ — после второго шага, $p(3)$ — после третьего шага.

Вариант 1

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & \beta & 0 \\ \alpha & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,1, 0,3, 0,2, 0,4)$$

Вариант 2

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & \beta & 0,2 & 0,4 \\ \alpha & 0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & \gamma & 0,1 \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,4, 0,3, 0,2, 0,1)$$

Вариант 3

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,3 & 0,1 \\ \alpha & 0,5 & \beta & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & \gamma \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

Вариант 4

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & \alpha & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & \beta \\ \gamma & 0,4 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,1, 0,7, 0,1, 0,1)$$

Вариант 5

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & \beta \\ \gamma & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,2, 0,1, 0,1, 0,6)$$

Вариант 6

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ \alpha & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \beta & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & \gamma \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,4, 0,2, 0,3, 0,1)$$

Вариант 7

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 & 0,7 \\ \alpha & 0,5 & \gamma & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & \beta & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,2, 0,1, 0,2, 0,5)$$

Вариант 8

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & \alpha & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & \beta & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix} \\ p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 9

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & \gamma & 0,5 \\ \alpha & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & \beta & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,6, 0,1, 0,1, 0,2)$$

Вариант 10

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & \alpha & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \beta & \gamma \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 11

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0,1 & 0,2 \\ \beta & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & \gamma & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,4, 0,1, 0,4)$$

Вариант 12

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & \gamma & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,2, 0,2, 0,2)$$

Вариант 13

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & \alpha \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & \beta & 0 \\ 0,1 & 0,5 & \gamma & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,4, 0,1, 0,3)$$

Вариант 14

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & \alpha & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,3, 0,3, 0,1)$$

Вариант 15

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0 & \beta & 0,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,3, 0,3)$$

Вариант 16

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & \alpha \\ \beta & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & \gamma & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,6, 0,2, 0,1)$$

Вариант 17

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & \beta & 0,2 \\ 0,5 & \gamma & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,5, 0,2)$$

Вариант 18

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & \alpha & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & \beta \\ \gamma & 0,4 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,2, 0,3)$$

Вариант 19

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & \gamma \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & \beta & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,6, 0,1, 0,1, 0,2)$$

Вариант 20

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & \alpha & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & \beta & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & \gamma & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 21

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & \beta \\ \gamma & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,1, 0,3, 0,5)$$

Вариант 22

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & \alpha & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & \beta \\ 0 & 0,2 & \gamma & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,1, 0,1, 0,7)$$

Вариант 23

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ \alpha & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,1, 0,4, 0,1)$$

Вариант 24

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 & \alpha \\ 0,3 & 0,1 & \beta & 0,2 \\ 0,1 & \gamma & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,5, 0,3, 0,1)$$

Вариант 25

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ \alpha & \beta & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,3, 0,4)$$

Вариант 26

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ \alpha & 0 & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & \gamma & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,1, 0,4, 0,1)$$

Вариант 27

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ \gamma & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & \alpha & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,4, 0,2)$$

Вариант 28

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & \alpha & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

Вариант 29

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0 & \gamma \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ \beta & 0,5 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,2, 0,2, 0,4)$$

Вариант 30

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,7, 0,1, 0,1, 0,1)$$

Вариант 31

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & \beta & 0 \\ 0,3 & 0,1 & \alpha & 0,2 \\ \gamma & 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,3, 0,2, 0,4)$$

Вариант 32

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & \alpha & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & \gamma & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,3, 0,2, 0,1)$$

Вариант 33

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,6 & \gamma & 0,3 & 0,1 \\ \alpha & 0,5 & \beta & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

Вариант 34

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & \alpha & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & \beta \\ \gamma & 0,4 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,7, 0,1, 0,1)$$

Вариант 35

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & \beta \\ \gamma & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,1, 0,6)$$

Вариант 36

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ \alpha & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \beta & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,2, 0,3, 0,1)$$

Вариант 37

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 & 0,7 \\ \alpha & 0,5 & \gamma & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & \beta & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,2, 0,5)$$

Вариант 38

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & \alpha & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & \beta & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 39

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & \gamma & 0,5 \\ \alpha & 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & \beta & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,6, 0,1, 0,1, 0,2)$$

Вариант 40

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & \alpha & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \beta & \gamma \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 41

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0,1 & 0,2 \\ \beta & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & \gamma & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,4, 0,1, 0,4)$$

Вариант 42

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,1 & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & \gamma & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,2, 0,2, 0,2)$$

Вариант 43

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & \alpha \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & \beta & 0 \\ 0,1 & 0,5 & \gamma & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,4, 0,1, 0,3)$$

Вариант 44

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & \alpha & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,3, 0,3, 0,1)$$

Вариант 45

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & \beta & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,3, 0,3)$$

Вариант 46

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & \alpha \\ \beta & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & \gamma & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,5, 0,3, 0,1)$$

Вариант 47

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & \beta & 0,2 \\ 0,5 & \gamma & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,5, 0,2)$$

Вариант 48

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & \alpha & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & \beta \\ \gamma & 0,4 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,2, 0,3)$$

Вариант 49

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & \gamma \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & \beta & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,6, 0,1, 0,1, 0,2)$$

Вариант 50

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & \alpha & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & \beta & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & \gamma & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,2, 0,3, 0,2)$$

Вариант 51

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & \beta \\ \gamma & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,1, 0,3, 0,5)$$

Вариант 52

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & \alpha & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 & \beta \\ 0 & 0,2 & \gamma & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,1, 0,1, 0,1, 0,7)$$

Вариант 53

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0,1 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ \alpha & 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,1, 0,4, 0,1)$$

Вариант 54

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 & \alpha \\ 0,3 & 0,1 & \beta & 0,2 \\ 0,1 & \gamma & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,5, 0,1, 0,2)$$

Вариант 55

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ \alpha & \beta & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,2, 0,1, 0,3, 0,4)$$

Вариант 56

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ \alpha & 0 & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & \gamma & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0, 0,5, 0,1)$$

Вариант 57

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ \gamma & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & \alpha & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,4, 0,1, 0,3, 0,2)$$

Вариант 58

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,3 & \gamma \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & \alpha & 0,3 & 0,2 \\ \beta & 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

Вариант 59

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & \gamma & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ \beta & 0,5 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

Вариант 60

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & \gamma & \beta \\ \alpha & 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(0) = (0,7, 0, 0,2, 0,1)$$

4.2. В начальный момент $t = 0$ частица находится на числовой оси в точке (состоянии) $k = 0$. В моменты $t = 1, \dots, 10$ она с равными вероятностями $1/3$ остается в текущем состоянии либо переходит в ближайшую целую точку k слева или справа — в зависимости от того, в какой из промежутков $[0; 0,333)$, $[0,333; 0,666)$, $[0,666; 1]$ попадает при очередном моделировании равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина X . Получить таблицу случайного блуждания точки за 10 шагов:

t	1	...	10
k	k_1	...	k_{10}

Использовать для X таблицу равномерного распределения на $[0, 1]$; значения из таблицы брать, начиная с номера i .

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
i	61	31	1	171	141	181	21	41

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
i	81	71	61	101	171	51	31	61

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
i	41	71	41	21	61	151	91	11

№ варианта	25	26	27	28	29	30
i	121	141	91	51	161	31

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
i	26	25	3	24	88	89	43	29

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
i	100	6	7	8	35	36	50	77

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
<i>i</i>	88	130	16	15	4	2	82	11

№ варианта	55	56	57	58	59	60
<i>i</i>	10	20	71	51	16	25

Таблица 2

Случайные числа, равномерно распределенные на [0, 1]

0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,0496	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387
0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,0053	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,6880	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,8230	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Взаимовлияние пары случайных величин X и Y характеризуется корреляционным моментом

$$\mu(X, Y) = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y)))$$

и коэффициентом корреляции

$$r = \frac{\mu(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

где σ_X, σ_Y — средние квадратические отклонения. Для корреляционного момента справедливо равенство:

$$\mu(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Для коэффициента корреляции справедливо неравенство: $|r_{XY}| \leq 1$.

Если задан случайный процесс X_t , а X_{t_1}, X_{t_2} — случайные величины, являющиеся сечениями процесса для произвольно взятых значений параметра t_1 и t_2 , то для них можно вычислить корреляционный момент $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$.

Корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух переменных $K_X(t_1, t_2)$, задаваемая формулой

$$K_X(t_1, t_2) = \mu(X_{t_1}, X_{t_2}).$$

Нормированной корреляционной функцией процесса X_t называется функция двух аргументов

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{\mu(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)}.$$

При нахождении функций $K_X(t_1, t_2)$ и $r_X(t_1, t_2)$ используются свойства математического ожидания и дисперсии.

Если имеются выборки объема n для сечений X_{t_1}, X_{t_2} :

$$(x_1^{(t_1)}, \dots, x_n^{(t_1)}), (x_1^{(t_2)}, \dots, x_n^{(t_2)}),$$

и уже вычислены выборочные значения m_{t_1}, m_{t_2} их математических ожиданий, то выборочное значение корреляционной функции вычисляется по формуле:

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^{(t_1)} - m_{t_1})(x_i^{(t_2)} - m_{t_2}). \quad (3)$$

Примеры

5.1. Пусть случайный процесс имеет вид $X_t = tU$ ($t \geq 0$), где случайная величина U имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 5$. Для вычисления нормированной корреляционной функции $r_X(t_1, t_2)$ последовательно находим:

$$m_X(t) = M(tU) = tM(U) = 3t;$$

$$D_X(t) = D(tU) = t^2 D(U) = 25t^2;$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)} = 5t;$$

$$\mu(X_{t_1}, X_{t_2}) = M(X_{t_1} X_{t_2}) - M(X_{t_1})M(X_{t_2}) = M(X_{t_1} X_{t_2}) - 9t_1 t_2;$$

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{M(X_{t_1} X_{t_2}) - 9t_1 t_2}{5t_1 \cdot 5t_2}.$$

5.2. Если у случайной величины U из предыдущего примера математическое ожидание $M(U) = 0$ (т. е. она является центрированной), то

$$M(X_{t_1} X_{t_2}) = 3t_1 3t_2 M(U^2) = 9t_1 t_2 D(U) = 45t_1 t_2,$$

и тогда

$$\mu(X_{t_1}, X_{t_2}) = 45t_1 t_2 - 9t_1 t_2 = 36t_1 t_2.$$

5.3. Пусть $V_t = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ — дискретный случайный процесс, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = 3/t$. В примере 2.1 лабораторной работы № 2 для каждого из пяти сечений (т. е. отдельно для $t = 1, 2, 3, 4, 5$) получены четыре реализации и вычислены выборочные значения математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратических отклонений:

$$V_1: v_1^{(1)} = 0,2393; v_2^{(1)} = 0,6692; v_3^{(1)} = 0,2758; v_4^{(1)} = 0,1163;$$

$$V_2: v_1^{(2)} = 0,0108; v_2^{(2)} = 0,0402; v_3^{(2)} = 0,4308; v_4^{(2)} = 0,4351;$$

$$V_3: v_1^{(3)} = 1,2063; v_2^{(3)} = 0,5920; v_3^{(3)} = 3,1212; v_4^{(3)} = 0,6348;$$

$$V_4: v_1^{(4)} = 3,7161; v_2^{(4)} = 0,8975; v_3^{(4)} = 0,4670; v_4^{(4)} = 0,8392;$$

$$V_5: v_1^{(5)} = 0,0256; v_2^{(5)} = 0,6232; v_3^{(5)} = 8,5546; v_4^{(5)} = 3,0172.$$

$$m_1 = 0,3251; m_2 = 0,2292; m_3 = 1,3885;$$

$$m_4 = 1,4799; m_5 = 3,0551.$$

$$d_1 = 0,0429; d_2 = 0,0416; d_3 = 1,0594;$$

$$d_4 = 1,6940; d_5 = 1,3343.$$

$$\sigma_1 = 0,2071; \sigma_2 = 0,2039; \sigma_3 = 1,0292;$$

$$\sigma_4 = 1,3015; \sigma_5 = 3,3666.$$

Вычисление по формуле (3) выборочных значений корреляционной функции $K_V(t_1, t_2)$ для пары сечений V_1, V_3 (т. е. при $t_1 = 1, t_2 = 3$), а также для пары сечений V_2, V_4 (т. е. при $t_1 = 1, t_2 = 3$) дает:

$$K_V(1, 3) = -0,6701, K_V(2, 4) = -0,1063.$$

Задания

5.1. Случайный процесс имеет вид $X_t = f(t) \cdot U$ ($t \geq 0$), где случайная величина U имеет нормальное распределение с параметрами $a = f(2)$ и $\sigma = f(1)$. Найти $m_X(t)$, $D_X(t)$, $\sigma_X(t)$, $\mu(X_{t_1}, X_{t_2})$, $r_X(t_1, t_2)$ при заданном математическом ожидании произведения сечений $M(X_{t_1} X_{t_2}) = t_1^3 t_2$.

5.2. Найти выборочные значения корреляционной функции $K_V(t_1, t_2)$ для пары сечений V_1, V_3 и для пары сечений V_2, V_4 по пяти реализациям дискретного случайного процесса $V_t = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, сечения которого V_t имеют показательное распределение с параметром $\lambda_t = \varphi(t)$. Для реализации выборочных значений сечений использовать таблицу равномерного распределения на $[0, 1]$; значения из таблицы брать, начиная с номера i .

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	$2t^2$	$t^2 + 1$	$t^2 + 2$	t^3	$2t + 1$	$2t + 3$	$3t^2$	$8/t^2$
$\varphi(t)$	$1/t$	$2/t$	$5/t$	$3/t$	$10/t$	$6/t$	$7/t$	$1/t$
i	1	21	31	41	51	61	71	81

№ вари- анта	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(t)$	$3/t^2$	$t+1$	$5/t$	$3/t+2$	$4/(t+1)$	t^2	$2t^2+3$	t^2+5
$\varphi(t)$	$11/(2t+1)$	$12/(2t+3)$	$1/(t+4)$	$(t+1)^2$	$1/(t+8)$	t^2+2	$7/(6t+1)$	$2t+4$
i	91	101	111	121	131	141	151	161

№ вари- анта	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(t)$	$5t+3$	$2t/(t+1)$	$3t+1$	$t+4$	$(t+1)/t$	$(t+2)/t^2$	$5t^2+1$	$3t^2$
$\varphi(t)$	$1+t$	$t+5$	$2t+1$	$3t+2$	$5/(t+4)$	$6/(t+1)$	$1/(2t+1)$	$t+2$
i	171	181	21	61	71	51	81	91

№ варианта	25	26	27	28	29	30
$f(t)$	$t+3$	$6t-3$	$2t+1$	$2t+3$	$2t^2$	$1/(2t-1)$
$\varphi(t)$	$1/(t+1)$	$(t+1)/(t+2)$	$3/(t^2+2)$	t^2+1	$2/(t+2)$	$4/(t+3)$
i	3	13	23	33	43	53

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
$f(t)$	$4t^2$	t^2+10	t^2+2	t^3	$2t+1$	$2t+3$	$3t^2$	$8/t^2$
$\varphi(t)$	$1/t$	$6/t$	$5/t$	$3/t$	$10/t$	$6/t$	$7/t$	$1/t$
i	63	73	83	41	93	61	4	14

№ вари- анта	39	40	41	42	43	44	45	46
$f(t)$	$3/t^2$	$t+1$	$5/t$	$3/t+2$	$4/t$	t^2	$2t^2+3$	t^2+5
$\varphi(t)$	$11/(2t+1)$	$12/(2t+3)$	$1/(t+4)$	$(t+1)^2$	$1/(t+8)$	t^2+2	$7/(6t+1)$	$2t+4$
i	24	34	44	54	6	16	26	28

№ вари- анта	47	48	49	50	51	52	53	54
$f(t)$	$5t$	$2t/(t+1)$	$3t+1$	$t+4$	$(t+1)/t$	$(t+2)/t^2$	$5t^2+1$	$3t^2$
$\varphi(t)$	$5+t$	$t+5$	1	$3t+2$	$5/(t+4)$	$6/(t+1)$	$1/t$	$t+2$
i	15	25	30	35	1	1	2	2

№ варианта	55	56	57	58	59	60
$f(t)$	5	$t-3$	$5t+1$	$2t+3$	$2t^2$	$1/(2t-1)$
$\varphi(t)$	$1/(t+1)$	$t/(t+2)$	$3/(t^2+1)$	t^2+1	$2/(t+2)$	$4/(t+3)$
i	81	19	71	20	17	5

Таблица 3

Случайные числа, равномерно распределенные на [0, 1]

0,8530	0,8592	0,2235	0,1688	0,5420	0,1803	0,2006	0,5942	0,0458	0,4416
0,3806	0,8352	0,9563	0,9527	0,2312	0,1317	0,1991	0,1893	0,1879	0,5050
0,0027	0,0289	0,4396	0,4252	0,4561	0,0315	0,3713	0,4906	0,0496	0,5954
0,6410	0,0235	0,6814	0,7514	0,6725	0,7627	0,9014	0,9629	0,6944	0,9743
0,4521	0,3148	0,2589	0,8075	0,7562	0,4135	0,3738	0,2077	0,3536	0,3387
0,4877	0,1343	0,4371	0,7054	0,9838	0,9414	0,5240	0,5206	0,2993	0,5532
0,0441	0,0053	0,0616	0,5101	0,7045	0,5329	0,9847	0,6880	0,0059	0,1636
0,2017	0,7063	0,5185	0,8028	0,3095	0,2646	0,9192	0,9669	0,5592	0,6528
0,1797	0,9902	0,4013	0,0843	0,4809	0,6569	0,1663	0,7891	0,4008	0,8294
0,7575	0,8386	0,0928	0,5362	0,2282	0,2804	0,7819	0,9710	0,8096	0,9121
0,9374	0,0161	0,2596	0,1927	0,5625	0,1687	0,6624	0,2007	0,1367	0,4346
0,3228	0,2190	0,4692	0,2469	0,5399	0,8099	0,2146	0,2075	0,3994	0,3771
0,0366	0,3267	0,1536	0,1853	0,0502	0,2797	0,6955	0,1638	0,3638	0,9626
0,8230	0,1714	0,1922	0,5197	0,0373	0,0714	0,5678	0,0052	0,3662	0,8037
0,9885	0,4319	0,6753	0,0345	0,6138	0,8522	0,2600	0,6095	0,9555	0,2930
0,6219	0,7436	0,1385	0,6963	0,5669	0,2011	0,6285	0,0037	0,9700	0,5401
0,0004	0,1691	0,2724	0,0050	0,4582	0,2495	0,0133	0,3456	0,0524	0,9500
0,5444	0,4473	0,2152	0,7963	0,3145	0,4782	0,9156	0,5706	0,4125	0,0002
0,4690	0,8859	0,7615	0,1984	0,9924	0,3529	0,8392	0,6127	0,7565	0,3461
0,4713	0,0391	0,5874	0,2385	0,2388	0,2496	0,6800	0,7167	0,9116	0,0971

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, имеющих математические ожидания и дисперсии, *сходится в среднеквадратическом (в среднем)* к случайной величине X : $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, если числовая последовательность $M((X_n - X)^2)$ сходится к нулю. Аналогично определяется *предел в среднеквадратическом* при $t \rightarrow t_0$ и при $t \rightarrow \infty$ для семейства случайных величин X_t , зависящих от непрерывного параметра t :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(X_t) = M(X) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} M((X_t - X)^2) = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(X_t) = M(X) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} M((X_t - X)^2) = 0.$$

Допустима перестановка символов математического ожидания случайной величины и предела в среднеквадратическом:

$$M(\lim_{t \rightarrow t_0} X_t) = \lim_{t \rightarrow t_0} M(X_t).$$

Производной случайного процесса X_t называется случайный процесс X'_t (или $\frac{dX_t}{dt}$), каждое сечение которого есть предел в среднеквадратическом отношения приращения сечения процесса X_t к приращению Δt параметра при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$X'_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}.$$

Аналогично определяются частные производные для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Для производной случайного процесса справедливы обычные формулы дифференцирования.

Производная X'_t , будучи случайным процессом, имеет математическое ожидание $m_{X'_t}(t)$, дисперсию $D_{X'_t}(t)$ и корреляционную функцию $K_{X'_t}(t_1, t_2)$.

Математическое ожидание производной случайного процесса равно производной от математического ожидания исходного процесса:

$$m_{X'_t}(t) = (m_{X_t}(t))'.$$

Корреляционная функция производной X'_t случайного процесса X_t равна смешанной производной второго порядка от его корреляционной функции:

$$K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Для дисперсии производной случайного процесса справедлива формула:

$$D_{X'}(t) = \left. \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1 = t_2 = t}.$$

Интегралом случайного процесса X_t по отрезку $[T_1, T_2]$ называется случайная величина, равная пределу в среднем интегральной суммы

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta t_i X_{t_i}$$

при условии, что ранг разбиения отрезка $[T_1, T_2]$ стремится к нулю:

$$\int_{t_1}^{t_2} X_t dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} S.$$

Аналогичным образом определяются кратные и повторные интегралы для процессов, зависящих от нескольких параметров.

Примеры

6.1. Пусть для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = at^2 + bt; \quad K_X(t_1, t_2) = De^{-a(t_2 - t_1)^2}.$$

Дифференцируя, получаем:

$$m_{X'}(t) = (m_X(t))' = (at^2 + bt)' = 2at + b;$$

$$\frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} = (De^{-a(t_2 - t_1)^2})'_{t_1} = 2Da(t_2 - t_1)e^{-a(t_2 - t_1)^2};$$

$$\begin{aligned} K_{X'}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \\ &= 2Da(t_2 - t_1)e^{-a(t_2 - t_1)^2} \Big|_{t_2} = 2Da(1 - 2a(t_2 - t_1)^2)e^{-a(t_2 - t_1)^2}. \end{aligned}$$

6.2. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла с переменным верхним пределом $Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau$, если для исходного случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X = at + b; \quad K_X(t_1, t_2) = De^{-a|t_1 - t_2|}.$$

Интегрируя, получаем:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau) d\tau = \int_0^t (a\tau + b) d\tau = \frac{at^2}{2} + bt.$$

Учитывая необходимость раскрытия знака модуля в записи $K_X(t_1, t_2)$, рассмотрим при вычислении $K_Y(t_1, t_2)$ два случая:

1) при $t_1 \leq t_2$

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} De^{-a|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= D \int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} e^{-a(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_2 \right) d\tau_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{D}{\alpha^2} (2\alpha t_2 - 1 + e^{-\alpha t_2} + e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha(t_2 - t_1)});$$

2) при $t_2 < t_1$ аналогичным образом получаем:

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{D}{\alpha^2} (2\alpha t_2 - 1 + e^{-\alpha t_2} + e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha(t_1 - t_2)}).$$

Объединяя оба случая, приходим к выражению

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{D}{\alpha^2} (2\alpha \min(t_1, t_2) - 1 + e^{-\alpha t_2} + e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha|t_1 - t_2|}).$$

Отсюда можно получить выражение для дисперсии при $t_1 = t_2 = t$:

$$D_Y(t) = \frac{2D}{\alpha^2} (\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}).$$

Задания

6.1. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию производной случайного процесса, у которого математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = f(t); K_X(t_1, t_2) = ke^{-(t_2 - t_1)^l}.$$

№ варианта	1	2	3	4	5
$f(t)$	$2te^{3t}$	t^2e^{-t}	e^{3t}/t	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln t - t}$
k	-3	2	5	11	17
l	2	4	2	6	8

№ варианта	6	7	8	9	10
$f(t)$	te^{-t}	$\operatorname{tg}(t^2)$	$\sin(t^3 - 1)$	$\sqrt{t^3} \ln t$	$\sqrt{e^t + 1/t}$
k	5	3	-7	-5	12
l	4	2	6	4	2

№ варианта	11	12	13	14	15
$f(t)$	$\sqrt{t} \ln t$	$\sqrt{\ln t}$	$e^{3t}/\sqrt{t}$	$\cos(t + \ln t)$	$\operatorname{tg}^3 t$
k	-3	12	8	-2	-1
l	8	4	2	6	2

№ варианта	16	17	18	19	20
$f(t)$	$2te^{3t}$	t^2e^{-t}	e^{3t}/t	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\operatorname{tg} t}$
k	3	-2	5	-3	11
l	6	2	4	4	8

№ варианта	21	22	23	24	25
$f(t)$	$(t + t^2)e^{3t}$	$t^{-2}e^{5t}$	e^t/t^2	$\sin(t \ln t)$	$\sqrt{\ln t + t}$
k	2	6	-11	33	-14
l	2	10	8	2	6

№ варианта	26	27	28	29	30
$f(t)$	$\ln t - e^{5t}$	$t^2 e^{-t}$	$e^{2t} / \ln t$	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln^2 t - t}$
k	-7	12	35	-12	-9
l	6	4	2	4	6

№ варианта	31	32	33	34	35
$f(t)$	$2te^t$	$5t^2 e^{-t}$	e^{7t} / t	$4t \ln t$	$\sqrt{\ln t - t}$
k	-3	2	5	11	10
l	3	5	2	6	8

№ варианта	36	37	38	39	40
$f(t)$	te^{-t}	$\operatorname{tg}(t^2)$	$\sin(t-1)$	$\sqrt{t^3} \ln t$	$\sqrt{e+1} / t$
k	3	2	-7	-3	1
l	4	2	4	4	2

№ варианта	41	42	43	44	45
$f(t)$	$\sqrt{t} \ln t$	$\sqrt{\ln t}$	$e^{4t} / \sqrt{t}$	$\cos(t + \ln t)$	$\operatorname{tg}^3 t$
k	-3	12	8	-2	-1
l	7	4	2	6	2

№ варианта	46	47	48	49	50
$f(t)$	$2te^{3t}$	$t^2 e^{-t}$	e^{6t} / t	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\operatorname{tg} t}$
k	3	-2	5	-3	10
l	6	2	3	4	8

№ варианта	51	52	53	54	55
$f(t)$	$(t+t^2)e^{3t}$	$t^{-2} e^{5t}$	e^t / t^2	$\sin(t \ln t)$	$\sqrt{\ln t + t}$
k	2	6	-11	33	-14
l	2	10	8	2	6

№ варианта	56	57	58	59	60
$f(t)$	$\ln t - e^{5t}$	$t^2 e^{-t}$	$e^{2t} / \ln t$	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln^2 t - t}$
k	-7	12	35	-12	-9
l	6	4	2	4	6

6.2. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла с переменным верхним пределом $Y_t = \int_0^t X_\tau d\tau$, если для случайного процесса X_t математическое ожидание и корреляционная функция имеют вид:

$$m_X(t) = f(t);$$

$$K_X(t_1, t_2) = ce^{-\alpha|t_2 - t_1|}.$$

№ варианта	1	2	3	4	5
$f(t)$	te^t	te^{-t}	$\ln t / t$	$\ln^3 t / t$	$\sqrt{3t-2}$
c	3	2	5	11	17
α	2	4	2	6	8

№ варианта	6	7	8	9	10
$f(t)$	e^{3t-1}	$\sin(5t)$	$\cos(4t)$	$\ln t$	$t^2 \ln t$
c	5	3	7	-5	12
α	4	2	6	4	2

№ варианта	11	12	13	14	15
$f(t)$	$t \ln t$	$\sqrt{3t+1}$	$\sin^2 t$	$\cos^2 t$	$\operatorname{tg}^3 t$
c	13	12	8	12	11
α	8	4	2	6	2

№ варианта	16	17	18	19	20
$f(t)$	$t - e^t$	$t + 2e^{-t}$	$(t+1)/t$	$t / (t+1)$	7^{-t}
c	3	6	5	31	21
α	6	2	4	4	8

№ варианта	21	22	23	24	25
$f(t)$	4^{3t}	$t \cos t$	te^{t+2}	5^{3t}	$t\sqrt{t}$
c	2	6	20	33	14
α	2	10	8	2	6

№ варианта	26	27	28	29	30
$f(t)$	$1/t - e^{5t}$	$t - e^{-t}$	$4/(t \ln t)$	$t^3 \ln t$	$\sqrt{\ln t} / t$
c	77	12	35	9	19
α	6	4	2	4	6

№ варианта	31	32	33	34	35
$f(t)$	te^t	te^{-t}	$\ln t / t$	$\ln^3 t / t$	$\sqrt{3t-2}$
c	13	12	3	11	17
α	2	5	3	6	8

№ варианта	36	37	38	39	40
$f(t)$	e^{2t-3}	$\sin(t)$	$\cos(5t)$	$\ln t$	$t^2 \ln t$
c	5	13	2	-5	12
α	4	3	2	4	2

№ варианта	41	42	43	44	45
$f(t)$	$t \ln t$	$\sqrt{6t+1}$	$\sin^2 t$	$\cos^2 t$	$\operatorname{tg}^3 t$
c	10	2	9	1	11
α	7	4	1	16	2

№ варианта	46	47	48	49	50
$f(t)$	$t - e^t$	$t + 5e^{-t}$	$(t+4)/t$	$t/(t+3)$	8^{-t}
c	3	16	15	3	2
α	6	2	4	4	3

№ варианта	51	52	53	54	55
$f(t)$	4^{3t}	$t \cos t$	te^{t+2}	5^{3t}	$t\sqrt{t}$
c	2	6	20	33	14
α	2	10	8	25	6

№ варианта	56	57	58	59	60
$f(t)$	$1/t - e^{5t}$	$t - e^{-t}$	$4/(t \ln t)$	$t^2 \ln t$	$3\sqrt{\ln t} / t$
c	7	12	13	19	19
α	1	2	3	7	6

ФГБОУ ВО "ТУМРФ им. акад. С.О. Макарова"

РЯД ФУРЬЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Теоретические сведения

Числовой ряд и ряд Фурье. Напомним основные понятия, связанные с числовым рядом и рядом Фурье функции. Если задана числовая последовательность x_n , то *числовым рядом* называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

имеющее смысл суммы бесконечного числа слагаемых.

Частичной суммой ряда называется сумма первых его n членов:

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$; число S в этом случае называется *суммой ряда*. Если конечного предела не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ длины $T = b - a$ называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right),$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx.$$

При естественных ограничениях на функцию $f(x)$ она является суммой своего ряда Фурье (раскладывается в ряд Фурье).

Разложение случайного процесса в ряд. Одним из основных методов исследования (неслучайных) функций является их представление рядами Фурье, т. е. гармонический анализ. Аналогичный метод используется при исследовании случайных процессов.

Пусть $X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(i)}, \dots$ — последовательность случайных процессов-слагаемых, которой соответствует последовательность частичных сумм:

$$S_t^{(n)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \dots + X_t^{(n)}.$$

Рядом для последовательности случайных процессов $X_t^{(i)}$ называется выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_t^{(i)} = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \dots + X_t^{(i)} + \dots,$$

имеющее смысл суммы бесконечного числа слагаемых-случайных процессов.

Ряд *сходится к случайному процессу* X_t , если при каждом значении параметра t имеет место сходимость в среднеквадратическом последовательности частичных сумм:

$$l.i.m._{n \rightarrow \infty} S_t^{(n)} = X_t.$$

Говорят также, что процесс X_t *раскладывается в ряд*.

Ряд Фурье случайного процесса. Будем предполагать случайный процесс X_t центрированным — в противном случае можно перейти к центрированному случайному процессу

$$\bar{X}_t = X_t - m_X(t).$$

Процесс X_t на промежутке $[0, T]$ *раскладывается в ряд Фурье*, если

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t) + V_n \sin(\omega_n t),$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

На случайные величины U_n, V_n накладываются требования:

– некоррелированность:

$$\mu(U_i, V_j) = \mu(U_i, U_j) = \mu(V_i, V_j) = 0 \text{ при } i \neq j;$$

– центрированность:

$$M(U_i) = M(V_i) = 0, \quad (i=1, 2, \dots);$$

– попарное равенство дисперсий:

$$D(U_i) = D(V_i) = D_i.$$

Случайный процесс X_t называется *стационарным (в широком смысле)*, если он удовлетворяет двум условиям:

- 1) математическое ожидание процесса постоянно при всех значениях параметра t : $m_X(t) = m_X = \text{const}$;
- 2) корреляционная функция процесса зависит только от разности аргументов: $K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau_1, \tau_2)$, если $t_2 - t_1 = \tau_2 - \tau_1$.

Содержательно стационарность процесса означает, что процесс протекает «во времени» однородно, его описание не зависит от выбора начала отсчета параметра t .

Представление стационарного случайного процесса X_t рядом Фурье называется его *спектральным разложением*. При этом случайные величины U_n, V_n называются *амплитудами*, а множители ω_n в аргументах синусов и косинусов (гармоник) — *частотами*.

Пример

Пусть стационарный случайный процесс задан каноническим представлением в виде ряда Фурье

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + V_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right),$$

где случайная величина U_n равномерно распределена на отрезке $\left[\frac{3k}{n}, \frac{9}{n}\right]$, а случайная величина V_n распределена по нормальному закону.

Найдем явную запись случайного процесса.

Поскольку математическое ожидание равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины равно $\frac{a+b}{2}$, то в силу требования центрированности U_n имеем для k условие

$\frac{3k}{n} + \frac{9}{n} = 0 \Rightarrow k = -3$. Дисперсия равномерного распределения равна $\frac{(b-a)^2}{12}$, так что для данного слу-

чая имеем $D(U_n) = \frac{\left(\frac{3}{n} - (-\frac{3}{n})\right)^2}{12} = \frac{3}{n^2}$.

Определим параметры нормального закона распределения случайной величины V_n . Центрированность V_n означает, что у данного нормального закона параметр $a_n = M(V_n) = 0$. Из требования равенства дисперсий случайных величин (амплитуд) U_n и V_n следует $D(V_n) = \frac{3}{n^2} \Rightarrow \sigma(V_n) = \frac{\sqrt{3}}{n}$.

Частота $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. Например, при $T = \frac{1}{6}$ находим: $\omega_n = 12\pi n$. Дискретный спектр процесса задается набором пар $(D_n, \omega_n) = (\frac{3}{n^2}, 12\pi n)$.

Задание

Стационарный случайный процесс X_t имеет каноническое представление в виде ряда Фурье:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + V_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right);$$

здесь U_n, V_n — некоррелированные случайные величины; U_n равномерно распределена на отрезке $[k\lambda, \lambda^2]$, V_n распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $2\mu - k$ и дисперсией $k^2\mu^2$ (параметр λ задан).

1) Указать, какому условию удовлетворяет корреляционная функция процесса $k_X(\tau)$.

2) Найти k, λ .

3) Найти дискретный спектр (D_n, ω_n) для $n=1, 2, 3, 4, 5$ при $t = \frac{T}{8}$ и при $t = \frac{T}{4}$.

4) Найти приближенные значения корреляционной функции $k_X(\tau)$ при $\tau = \frac{\pi}{4}$ и при $\tau = \pi$, приняв

в качестве приближения частичную сумму S_5 в представлении $k_X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\omega_n \tau)$.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
λ	1	2	-1	3	-2	6	7	-3

№ варианта	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	8	-7	-6	10	171	51	31	61

№ варианта	17	18	19	20	21	22	23	24
λ	41	71	41	-10	61	151	91	11

№ варианта	25	26	27	28	29	30
λ	2	-5	9	5	16	-14

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38
λ	-10	12	-1	3	-2	6	7	-3

№ варианта	39	40	41	42	43	44	45	46
λ	8	-7	-6	10	43	51	-3	56

№ варианта	47	48	49	50	51	52	53	54
λ	41	45	41	-10	61	151	91	81

№ варианта	55	56	57	58	59	50
λ	6	-15	9	5	16	-14

ФГБОУ ВО "ТУМРФ им. акад. С.О. Макарова"

Список литературы

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей : учебник для вузов. — М. : Высш. шк., 2001. — 575 с.
2. *Гихман И. И.* — Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1965. — 655 с.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Высш. шк., 2002. — 478 с.
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М. : Высш. шк., 1979. — 400 с.
5. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / пер. с англ. В. В. Калашникова ; под ред. И. Н. Коваленко. — М. : Мир, 1971. — 536 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М. : URSS ЛИБРОКОМ, 2009. — 428 с.
7. *Истомин Е. П.* Методы теории вероятностей и математической статистики в моделировании транспортных процессов / Е. П. Истомин, Т. П. Кныш, А. П. Нырков, А. Р. Шкадова. — СПб. : СПГУВК, 1999. — 168 с.
8. *Шкадова А. Р.* Теория вероятностей / А. Р. Шкадова, А. П. Нырков. — СПб. : СПГУВК, 2003. — 198 с.
9. *Ястребов М. Ю.* Теория вероятностей : учеб. пособие / М. Ю. Ястребов. — СПб. : Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2018. — 96 с.
10. *Нырков А. П.* Генераторы случайных чисел : учеб. пособие / А. П. Нырков, А. А. Нырков. — СПб. : Изд-во ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова, 2015. — 56 с.
11. *Ястребов М. Ю.* Математические основы анализа стохастических помех в каналах связи / М. Ю. Ястребов, И. В. Ланева. — СПб. : Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2019. — 62 с.

Учебное издание

Ястребов Михаил Юрьевич, канд. экон. наук, проф.

Нырков Анатолий Павлович, д-р техн. наук, проф.

Ланева Ирина Владимировна, канд. экон. наук, доц.

Ли Изольда Валерьевна, канд. техн. наук

Теория случайных процессов

Лабораторный практикум



198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2

Тел.: (812) 748-97-19, 748-97-23

e-mail: izdat@gumrf.ru

Ответственный за выпуск

М. В. Беглецова

Редактор

Л. Б. Кожева

Оригинал-макет

Т. Н. Степанова

Подписано в печать 11.01.2021

Формат 60×90/8. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman

Усл. печ. л. 6,5. Тираж 100 (первый завод — 50) экз. Заказ № 314/21