ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНЫХ КОММУНИКАЦИЙ»

М. Ю. Ястребов

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано Редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций

Санкт-Петербург

2011

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Рецензенты:
к. ф.-м.н., доцент *Кузнецов В. О.*,
к. ф.-м.н., доцент *Гулевич Н. М.*

Ястребов М. Ю.

Дифференциальные уравнения: учебное пособие. — СПб: СПГУВК, 2011. — 43 с.

Предназначено для студентов технических и информационных специальностей.

Содержание соответствует рабочей программе дисциплины «Математика».

УДК 517.9
ББК 22.161.6

1. Исходные понятия

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные различных порядков.

Функция $y(x)$ предполагается заданной на некотором промежутке (который также, как правило, не задан изначально и подлежит определению вместе с $y(x)$).

Замечание. В отличие от дифференциальных уравнений вида (1), в которых искомая функция зависит только от одной переменной, уравнения, связывающие неизвестную функцию нескольких независимых переменных и ее частные производные различных порядков, называются *уравнениями в частных производных*, или *уравнениями математической физики*.

Например, *уравнение теплопроводности* описывает изменение температуры тела $u(x, y, z, t)$ в каждой его точке $(x; y; z)$ в зависимости от времени t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

В дальнейшем, говоря о дифференциальных уравнениях, мы будем иметь ввиду обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Таким образом уравнение (1) задает дифференциальное уравнение n-го порядка.

Напомним, что под *промежутком* $\langle a, b \rangle$ понимается любой из возможных промежутков, содержащий или не содержащий граничные точки: $[a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b)$.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* (1) на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется функция $y(x)$, дифференцируемая n раз и обращающая его на $< a, b >$ в тождество (то есть в равенство, верное при всех $x \in < a, b >$).

Примеры.

(а) $xy' - y = 0$ — уравнение 1-го порядка;

(б) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{4x}$ — уравнение 2-го порядка;

(в) $y^{(4)} - 24 = 0$ — уравнение 4-го порядка.

Нетрудно проверить (проделайте это самостоятельно), что для уравнения (а) решениями на $(-\infty, +\infty)$, являются, в частности, функции $y_1 = x,\quad y_2 = 3x,\quad y_3 = -\sqrt{2}x$. Для уравнения (б) решениями при всех вещественных x являются функции $y_1 = e^{4x}$ и $y_2 = 5e^{4x}$. Для уравнения (в) всякая функция вида $y = x^4 + C$, где C — произвольная постоянная, является решением на $(-\infty, +\infty)$.

Определение. График решения $y(x)$ дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называют *интегрированием* данного уравнения.

2. Начальные условия и задача Коши

Определение. *Начальные условия* для дифференциального уравнения n-го порядка — это набор чисел

$$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \tag{2}$$

задающий для фиксированного значения независимой переменной x_0 значения неизвестной функции $y(x_0) = y_0$ и ее производных вплоть до порядка, на единицу меньшего порядка уравнения:

$$y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Определение. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения называется задача отыскания решения $y(x)$, отвечающего заданным начальным условиям.

Геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

Для дифференциального уравнения 1-го порядка (при $n = 1$) начальные условия (2) имеют вид пары чисел (x_0, y_0). Тем самым ставится задача отыскания решения $y(x)$, для которого $y(x_0) = y_0$. Геометрически это означает выбор из совокупности интегральных кривых той, которая проходит через заданную точку плоскости $(x_0; y_0)$ (рис. 1).

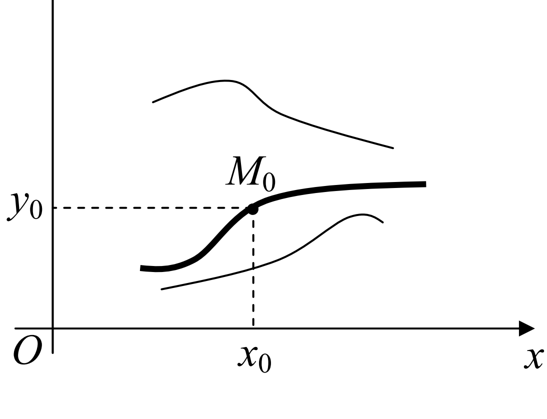

Рис. 1

Геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка

Для дифференциального уравнения 2-го порядка (при $n=2$) начальные условия (2) имеют вид тройки чисел (x_0, y_0, y_0'), и ставится задача отыскания решения $y(x)$, для которого $y(x_0)=y_0$ и $y'(x_0)=y_0'$. Геометрически это означает выбор из совокупности интегральных кривых той, которая, во-первых, проходит через заданную точку плоскости $(x_0; y_0)$, и, во-вторых, имеет в этой точке заданный угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\varphi = y_0'$ (рис. 2).

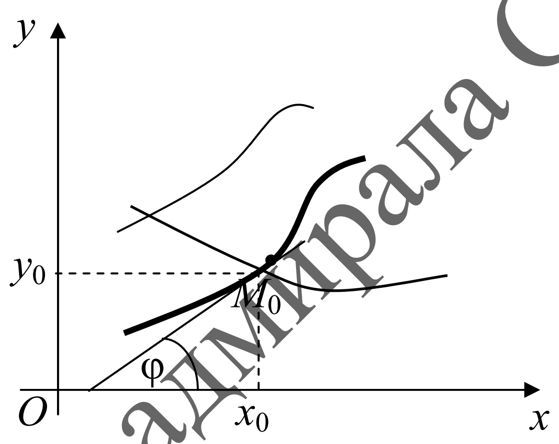

Рис. 2

3. Общее решение и общий интеграл

Начальные условия $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, будучи набором из $n+1$ чисел, задают точку пространства R^{n+1}. Множество всех рассматриваемых вариантов начальных условий образует некоторую область $D \subset R^{n+1}$.

Для различных видов ограничений на функцию F и на область D имеет место существование и единственность решения задачи Коши для начальных условий из D. Приведем примеры соответствующих теорем.

I. Пусть уравнение 1-го порядка является разрешённым относительно производной y':

$$y' = f(x, y).$$

Теорема 1. *Если функция* f *и ее частная производная* f'_y *непрерывны в области* D *плоскости* Oxy, *то решение задачи Коши для любых начальных условий* $(x_0, y_0) \in D$ *существует и единственно в некоторой окрестности точки* x_0.

II. Пусть уравнение n-го порядка является разрешённым относительно старшей производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Теорема 2. *Если функция* f *и ее частные производные* $f'_y,\ f'_{y'}, \ldots, f'_{y^{(n-1)}}$ *непрерывны в области* D $(n+1)$*-мерного пространства* $Oxyy' \ldots y^{(n-1)}$, *то решение задачи Коши для любых начальных условий* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *существует и единственно в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

В дальнейшем будем предполагать, что дифференциальные уравнения рассматриваются в области D существования и единственности решения.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = f(x, C_1, \ldots, C_n)$, зависящая от аргумента x и от n произвольных постоянных $C_1,...,C_n$, которая удовлетворяет двум условиям:

1) при любых значениях произвольных постоянных эта функция является решением;

2) за счет выбора значений произвольных постоянных можно получить решение задачи Коши для любых начальных условий из области существования и единственности решения.

Заметим, что *количество произвольных постоянных равно порядку уравнения*.

Определение. *Частным решением* дифференциального уравнения называется функция, которая получается из общего решения, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Напомним определение неявной функции: функция $y = f(x)$ в окрестности U точки x_0, *задана неявно уравнением* $\Phi(x, y) = 0$, если при всех x из этой окрестности справедливо равенство $\Phi(x, f(x)) = 0$.

Обычное, «явное» задание функции можно рассматривать как частный случай неявного: $y = \sin x \Leftrightarrow y - \sin x = 0$; здесь $\Phi(x, y) = y - \sin x$.

Определение. *Общим интегралом* дифференциального уравнения n-го порядка называется уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{3}$$

зависящее от n произвольных постоянных $C_1,...,C_n$, которое задает общее решение $y = f(x, C_1,...,C_n)$ как неявную функцию.

Определение. *Частным интегралом* называется уравнение, которое получается из общего интеграла (3), если произвольным постоянным придать определенные значения.

Замечание. В тех случаях, когда удается найти решение дифференциального уравнения, оно имеет, как правило, вид общего интеграла (3).

Если при этом можно y явно выразить через $x, C_1, \ldots, C_n$ («разрешить уравнение относительно y»), то приходим к общему решению.

4. Метод разделения переменных

Определение. *Уравнением с разделенными переменными* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$g(y)y' = h(x), \tag{4}$$

с непрерывными функциями g и h

Смысл этого термина заключается в том, что переменные y и x разделены по разным частям равенства (4).

Напомним, что, согласно определению, дифференциал функции $y(x)$ есть произведение производной на дифференциал независимой переменной: $dy = y'dx$. Если умножить обе части равенства (4) на dx, получим:

$$g(y)dy = h(x)dx. \tag{5}$$

Это другой, более традиционный способ записи уравнения с разделенными переменными.

Теорема. Если в уравнении (5) функции $g(y)$ и $h(x)$ имеют первообразные $G(y)$ и $H(x)$, то общий интеграл уравнения имеет вид:

$$G(y) = H(x) + C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание. Если для обозначения первообразных использовать символ неопределенного интеграла, то общий интеграл записывается в виде:

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx + C. \tag{7}$$

Доказательство. Опуская доказательство того, что уравнение (6) действительно задает неявную функцию $y(x)$, убедимся, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Для этого продифференцируем по x равенство (6), применяя для левой части правило производной сложной функции с промежуточной переменной y:

$$G'(y)y'(x) = H'(x),$$

или, учитывая, что G и H первообразные для g и h:

$g(y)y' = h(x)$.

Остается убедиться, что за счет выбора значения произвольной постоянной C можно обеспечить выполнение любых начальных условий $y(x_0) = y_0$. Подставляя начальные условия в (6), получаем:

$$G(y_0) = H(x_0) + C \;\Rightarrow\; C = G(y_0) - H(x_0). \;\blacksquare$$

Примеры. 1. Для уравнения $\cos y dy = 3x^2 dx$ найдем общий интеграл и частный интеграл для начальных условий $\left(x_0 = 0; y_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Имеем:

$$\int \cos y dy = 3\int x^2 dx + C;\;\; \sin y = x^3 + C$$

— это общий интеграл.

Подставим теперь в общий интеграл начальные условия и найдем соответствующее значение константы C:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 0^3 + C \;\Leftrightarrow\; C = 1.$$

Следовательно, частный интеграл, дающий решение задачи Коши, имеет вид:

$$\sin y = x^3 + 1.$$

2. Рассмотрим уравнение $5y^4y' = \frac{1}{x}$ с начальными условиями $\left(x_0 = e; y_0 = 0\right)$. Умножая обе части уравнения на dx и затем интегрируя, получаем:

$$5y^4y'dx = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow 5y^4dy = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int 5y^4dy = \int \frac{1}{x}dx + C \Leftrightarrow$$

$y^5 = \ln|x| + C$ — это общий интеграл. Выражая отсюда явно y через x и C, получаем общее решение: $y = \left(\ln|x| + C\right)^{\frac{1}{5}}$. Подстановка начальных условий в общее решение дает: $0 = \left(\ln e + C\right)^{\frac{1}{5}}$, так что $C = -1$. Следовательно, функция $y = \left(\ln|x| - 1\right)^{\frac{1}{5}}$ является решением задачи Коши.

Определение. *Уравнением с разделяющимися переменными* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$g_1(y)h_1(x)dy = g_2(y)h_2(x)dx, \tag{8}$$

с непрерывными функциями g_1, g_2, h_1, h_2.

В этом уравнении каждая из частей является произведением двух множителей, один из которых зависит только от y, а другой – только от x.

От этого уравнения легко перейти к уравнению с разделенными переменными, деля обе части на произведение $g_2(y)h_1(x) \neq 0$ («разделяя переменные»):

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{h_2(x)}{h_1(x)}dx.$$

Примеры. 1. $\dfrac{\ln y}{x}dy = 2ye^{x^2}dx$. Обе части разделим на y и умножим на x: $\dfrac{\ln y}{y}dy = 2xe^{x^2}dx$. Интегрируем:

$$\int \frac{\ln y}{y}dy = \int 2xe^{x^2}dx \iff \frac{(\ln y)^2}{2} \iff e^{x^2} + C$$

— общий интеграл.

2. $\operatorname{arctg} y \cdot y' = (1+y^2)$; начальные условия: $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. Записываем производную y' как отношение дифференциалов:

$$\operatorname{arctg} y \frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Обе части умножим на dx, разделим на $1+y^2$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} y\, dy}{1+y^2} = \int dx \iff \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{2} = x + C$$

— общий интеграл. Найдем теперь частный интеграл, удовлетворяющий начальным условиям. Подставляя начальные условия в полученное уравнение, имеем:

$$\frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} + C;\ C = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, частный интеграл, дающий решение задачи Коши, имеет вид:

$$\frac{\operatorname{arctg}^2 y}{2} = x + \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4}.$$

5. Однородное уравнение первого порядка

Определение. *Однородным уравнением первого порядка* называется уравнение, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

в котором функция f при всех вещественных $\lambda \neq 0$ удовлетворяет условию:

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y).$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = \dfrac{1}{x}$, убеждаемся, что правая часть зависит только от отношения переменных $\dfrac{y}{x}$: $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.

Приведем примеры таких функций:

1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{y^2}$; 2) $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{x-y}}$. Напротив, функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^3}{y^2}$, как легко проверить, не удовлетворяет условию $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$.

Введем новую искомую функцию $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, так что $y(x) = u(x)x$. Тогда формула для производной произведения дает: $y' = u'x + u$, и уравнение (9) принимает вид:

$$u'x + u = f(1, u) \;\Leftrightarrow\; u' = f(1, u) - u \;\Leftrightarrow\; \frac{du}{f(1, u) - u} = dx$$

— уравнение с разделяющимися переменными относительно новой искомой функции $u(x)$. Если для него найден общий интеграл (методом, описанным в предыдущем разделе):

$$\Phi(x,u,C)=0,$$

то, заменяя в нем y на $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл для исходной неизвестной функции $y(x)$:

$$\Phi\left(x,\frac{y}{x},C\right)=0.$$

Алгоритм решения однородного уравнения первого порядка:

1. Проверка однородности: $f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$.

2. Введение новой искомой функции $u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$.

3. Замена в уравнении y на ux, y' на $u'x+u$.

4. Решение полученного уравнения с разделяющимися переменными относительно u.

5. Замена в полученном общем интеграле u на $\dfrac{y}{x}$.

Пример. Решим уравнение $y'=1+\dfrac{y}{x}$. Здесь $f(x,y)=1+\dfrac{y}{x}$, $f(\lambda x,\lambda y)=1+\dfrac{\lambda y}{\lambda x}=1+\dfrac{y}{x}=f(x,y)$, так что уравнение, действительно, является однородным. После введения новой переменной u получаем уравнение:

$$u'x+u=1+u \iff \frac{du}{dx}x=1 \iff du=\frac{dx}{x} \iff$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x} \iff u = \ln|x| + C.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем общий интеграл для исходной неизвестной функции y: $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$.

6. Линейное уравнение первого порядка

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида: $y' + p(x)y = q(x)$ с непрерывными функциями p и q.

Будем искать общее решение *методом И.Бернулли* в виде произведения двух новых неизвестных функций: $y(x) = u(x)v(x)$, что дает определенную свободу в выборе одного из множителей, позволяя придать ему необходимый для дальнейшего вид. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

Группируя слагаемые с u, получаем: $u'v + u[v' + p(x)v] = q(x)$.

Потребуем от функции v, чтобы множитель в квадратных скобках при u тождественно обращался в нуль:

$$v' + p(x)v = 0 \qquad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем его частное решение v (без произвольной постоянной):

$$(10) \iff \frac{dv}{dx} = -p(x)v \iff \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \;;\; \ln|v| = -\int p(x)dx \,;\; |v| = e^{-\int p(x)dx} \,;$$

выбираем в качестве частного решения функцию $v = e^{-\int p(x)dx}$ (здесь символом неопределенного интеграла обозначена какая-либо первообразная функции p).

Теперь подстановка найденной функции v в (10) дает уравнение с разделяющимися переменными относительно u:

$$u'v = q(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{du}{dx}v = q(x) \;\Leftrightarrow\; du = \frac{q(x)}{v(x)}dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int du = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C \;\Leftrightarrow\; u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C \;.$$

В итоге получаем общее решение:

$$y = uv;$$

$$y = \left(\int \frac{q(x)}{v} dx + C \right) v = \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} . \quad (11)$$

Хотя при решении линейного уравнения можно сразу выписывать общий интеграл по формуле (11), представляется полезным проследить на примере всю цепочку выкладок, приводящих к (11).

Пример. Рассмотрим линейное уравнение:

$$y' + \frac{1}{x} y = x$$

на интервале $(0, +\infty)$ с начальными условиями $(x_0 = 3;\, y_0 = 2)$.

Здесь $p(x) = \dfrac{1}{x};\;\; q(x) = x$. Полагаем:

$$y(x) = u(x)v(x); \quad y' = u'v + uv' .$$

Подставляем в уравнение выражения для y и y':

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = x;.$$

$$u'v + u\left[v' + \frac{1}{x}v\right] = x. \qquad (12)$$

Накладываем на v условие: $v' + \frac{1}{x}v = 0;$ тогда

$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v;\quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{x}dx;\quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{1}{x}dx;\ \ln|v| = -\ln x$, и можно выбрать $v = \frac{1}{x}$. Подставляем v в (12) и учитываем, что, в соответствии с выбором функции v, выражение в квадратных скобках тождественно равно нулю:

$$u'\frac{1}{x} = x;\ \frac{du}{dx} = x^2;\ du = x^2dx;\ \int du = \int x^2dx;\ u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Функция

$$y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x}$$

является общим решением.

Найдем частное решение задачи Коши. Подставим для этого начальные условия в общее решение и найдем соответствующее значение константы C:

$$2 = (9 + C)\cdot\frac{1}{3};\ C = -3.$$

Подставив найденное значение C в общее решение, получаем решение задачи Коши:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} - 3\right)\frac{1}{x}.$$

7. Уравнения, допускающие понижение порядка

7.1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение уравнения означает отыскание функции по ее производной n-го порядка.

При каждом интегрировании производной ее порядок на единицу понижается: $\int y^{(k)}dx = y^{(k-1)} + C$.

Интегрируя последовательно n раз, получаем (при каждом интегрировании добавляется очередная произвольная постоянная):

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx + C_2 = \int \left(f_1(x) + C_1\right)dx + C_2;$$

…

$$y = \int y'dx + C_n = \int \left(f_{n-1}(x) + C_{n-1}\right)dx + C_n.$$

Таким образом, найденная функция y, в соответствии с определением общего решения, зависит от n произвольных постоянных.

Пример. Для уравнения третьего порядка $y^{(3)} = e^x$ найдем общее решение, а затем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $(x_0 = 1;\ y_0 = 2;\ y_0' = -3;\ y_0'' = 0)$.

Последовательные интегрирования дают:

$$y'' = \int e^x dx = e^x + C_1;$$

$$y' = \int (e^x + C_1)dx = e^x + C_1 x + C_2;$$

$y = \int (e^x + C_1 x + C_2)dx = e^x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ — общее решение.

Подставляя начальные условия в полученные выражения для y, y', y'', получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} e + C_1 = 0, \\ e + C_1 + C_2 = -3, \\ e + \dfrac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 2. \end{cases}$$

Отсюда: $C_1 = -e;\ C_2 = -3;\ C_3 = 5 - \dfrac{e}{2}$, так что решение задачи Коши имеет вид: $y = e^x - e\dfrac{x^2}{2} - 3x + 5 - \dfrac{e}{2}$.

7.2. Уравнение, не содержащее явно неизвестную функцию *y*

Рассмотрим уравнение второго порядка вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно искомую функцию y.

Введем новую неизвестную функцию $z(x) = y'(x)$. Тогда $y'' = (y')' = z'(x)$, и уравнение принимает вид: $F(x, z, z') = 0$. Это уравнение первого порядка. Если найдено его общее решение

$z=\varphi(x,C_1)$, то возвращаясь к исходной неизвестной функции y, получаем $y'=\varphi(x,C_1)$, так что y находится интегрированием:

$$y=\int y'(x)dx+C_2=\int\big(\varphi(x,C_1)\big)dx+C_2.$$

Аналогичным образом можно понизить на единицу порядок не содержащего явно y уравнения $F(x,y',y'',...,y^{(n)})=0$.

Пример. $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{x+2}{x+1}$. Полагая $y'=z,\ \ y''=z'$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции z:

$$\frac{z'}{z}=\frac{x+2}{x+1};\quad \frac{dz}{z}=\frac{x+2}{x+1}dx;$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{x+2}{x+1}dx;\quad \ln|z|=x+\ln|x+1|+C_1.$$

Ограничимся случаем $x\in(-1,+\infty)$, $z>0$, что означает строгое возрастание искомой функции y (так как $y'>0$). Тогда

$$z=e^{x+\ln(x+1)+C_1}=(x+1)e^{x+C_1},$$

или

$$y'=(x+1)e^{x+C_1}.$$

Наконец, интегрируя по частям, получаем общее решение:

$$y=\int(x+1)e^{x+C_1}dx=xe^{x+C_1}+C_2.$$

7.3. Уравнение, не содержащее явно независимую переменную *x*

Рассмотрим уравнение второго порядка вида $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее явно независимую переменную x.

Будем предполагать $y(x)$ строго монотонной функцией. Тогда существует обратная функция $x = x(y)$, и производные y', y'' можно рассматривать как сложные функции независимой переменной y:

$$y'(x) = y'(x(y)); \quad y''(x) = y''(x(y)).$$

Введем новую неизвестную функцию $y' = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(p(y)\right)'_x = p'_y(y)y'_x(x) = p'(y)p(y),$$

так что исходное уравнение второго порядка переходит в уравнение первого порядка относительно новой неизвестной функции $p(y)$:

$$F_1(y, p(y), p'(y)) = 0. \qquad (13)$$

Если найден общий интеграл уравнения (13)

$$\Phi(y, p, C_1) = 0,$$

то, заменяя в нем p на y', приходим к уравнению первого порядка относительно исходной неизвестной функции $y(x)$:

$\Phi(y, y', C_1) = 0$.

Таким образом, решение уравнения второго порядка сводится к последовательному решению двух уравнений первого порядка.

Пример. Рассмотрим уравнение $y''y = y'^2$. Полагаем $y' = p(y)$; тогда $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$. Исходное уравнение преобразуется к виду:

$\frac{dp}{dy}py = p^2$. Ограничиваясь случаем $p \neq 0$, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

Откуда

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + C_1.$$

Произвольную константу интегрирования удобно записать в виде $\ln|C_1|$, поскольку логарифмическая функция принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| = \ln(|C_1 y|).$$

$$p = \pm C_1 y.$$

Поскольку здесь постоянный множитель при y, записанный в виде C_1, принимает, как и множитель $\pm C_1$, все вещественные значения, можно записать: $p = C_1 y$

Возвращаемся к исходной неизвестной функции y:

$$y' = C_1 y; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx + C_2;$$

$$\ln|y| = C_1 x + C_2$$

— общий интеграл.

8. Линейное уравнение второго порядка

8.1. Основные понятия

Определение. *Линейным уравнением второго порядка* называется уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (14)$$

с непрерывными на интервале (a, b) функциями $p,\ q$ и f.

Из теоремы 2, приведенной на с. 6, следует, что указанная непрерывность гарантирует при $x_0 \in (a, b)$ существование и единственность решения задачи Коши с любыми начальными данными $x_0 \in (a, b);\ y_0, y_0' \in R$.

Определение. *Однородным линейным уравнением второго порядка* называется уравнение с нулевой правой частью:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (15)$$

8.2. Свойства решений однородного линейного уравнения

Из свойств производной следует, что для любых функций y_1, y_2 и любых вещественных чисел λ, μ:

$$\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right)^{(n)} = \lambda y_1^{(n)} + \mu y_2^{(n)}.$$

Обозначим правую часть уравнений (14) и (15) через $L(y)$:

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y.$$

Тогда эти уравнения принимают вид $L(y) = f(x)$ и $L(y) = 0$ соответственно. При этом

$$L(\lambda y_1 \pm \mu y_2) = \lambda L(y_1) \pm \mu L(y_2),$$

Теорема 3: *Если функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями однородного линейного уравнения* (15)*, то функция* $\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ *также является его решением.*

Доказательство. Пусть $L(y_1) = 0$ и $L(y_2) = 0$. Тогда

$$L(\lambda y_1 \pm \mu y_2) = \lambda L(y_1) \pm \mu L(y_2) = 0 \pm 0 = 0. \quad \blacksquare$$

8.3. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{16}$$

(p и q – постоянные числа), и *соответствующее ему однородное уравнение*

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{17}$$

Определение. *Характеристическим уравнением*, соответствующим дифференциальному уравнению (17), называется алгебраическое квадратное уравнение

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{18}$$

Отметим, что второй производной y'' дифференциального уравнения соответствует в характеристическом уравнении z^2. Коэффициент при первой производной y' переходит в коэффициент при первой степени z. Наконец, коэффициент при y, то есть при производной нулевого порядка, переходит в свободный член (коэффициент при нулевой степени z).

Примеры. 1. Для линейного однородного уравнения $y'' - 3y' - 10y = 0$ соответствующее характеристическое уравнение записывается в виде $z^2 - 3z - 10 = 0$.

2. Уравнению $y'' + 2y' = 0$ соответствует характеристическое уравнение $z^2 + 2z = 0$.

3. Уравнению $y'' + 7y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $z^2 + 7 = 0$.

Общее решение однородного уравнения (17) можно получить, исходя из корней соответствующего характеристического уравнения (17). Здесь возможны три случая в соответствии с возможным значением его дискриминанта $D = p^2 - 4q$.

А. Случай положительного дискриминанта. Пусть $D > 0$. В этом случае уравнение (18) имеет два различных вещественных корня z_1 и z_2:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2},$$

что соответствует разложению квадратного трехчлена на множители с вещественными коэффициентами:

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

Можно проверить, что в этом случае общее решение однородного уравнения (16) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}}. \qquad (19)$$

Примеры. 1. $y'' + 3y' - 18y = 0$; начальные условия: $x_0 = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = -5$. Соответствующее характеристическое уравнение: $z^2 + 3z - 18 = 0$. Дискриминант $D = 81$. Корни квадратного уравнения $z_1 = -6,\ z_2 = 3$. Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{3x}$.

Найдем частное решение для задачи Коши.

Дифференцируем общее решение: $y' = -6C_1e^{-6x} + 3C_2e^{3x}$. Подставляем начальные условия в y и y' (учитывая, что $e^0 = 1$):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -6C_1 + 3C_2 = -5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $C_1 = \frac{8}{9};\ C_2 = \frac{1}{9}$. Соответствующее решение задачи Коши: $y = \frac{8}{9}e^{-6x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

2. $y'' + \sqrt{2}y' = 0$. Характеристическое уравнение $z^2 + \sqrt{2}z = 0 \Leftrightarrow z(z+\sqrt{2}) = 0$. Корни квадратного уравнения $z_1 = -\sqrt{2},\ z_2 = 0$. Общее решение имеет вид: $y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2$.

Б. Случай нулевого дискриминанта. Пусть $D = 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет один вещественный корень кратности 2:

$$z_1 = z_2 = -\frac{p}{2},$$

что соответствует разложению квадратного трехчлена на множители с вещественными коэффициентами:

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)^2.$$

Можно проверить, что в этом случае общее решение однородного уравнения (17) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1e^{z_1x} + C_2xe^{z_2x}}. \tag{20}$$

Пример. $y'' - 10y' + 25y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $z^2 - 10z + 25 = 0$. Дискриминант $D = 0$. Кратный корень квадратного уравнения $z_1 = z_2 = 5$. Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$.

В. Случай отрицательного дискриминанта. Пусть $D < 0$. В этом случае уравнение (17) имеет два различных комплексных корня z_1 и z_2, которые задаются формулой:

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \text{ где } \alpha = \frac{-p}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}.$$

К этим значениям можно придти, используя формально выражение для корней, полученное в случае положительного дискриминанта, и помня, что i обозначает «мнимую единицу» — комплексное число, для которого $i^2 = -1$:

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{|D| \cdot (-1)}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2} \cdot \sqrt{-1} =$$

$$= \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2} i.$$

Можно проверить, что в этом случае общее решение однородного уравнения (17) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x}. \qquad (21)$$

Примеры. 1. $y'' - 12y' + 40y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $z^2 - 12z + 40 = 0$. Дискриминант $D = -16$. Корни квадратного уравнения $z_{1,2} = 6 \pm 2i; \quad \alpha = 6, \beta = 2$. Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{6x} \cos 2x + C_2 e^{6x} \sin 2x$.

2. $y'' + 8y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $z^2 + 8 = 0$. Корни квадратного уравнения $z_{1,2} = \pm\sqrt{-8} = 0 \pm \sqrt{8}i$; $\alpha = 0, \beta = \sqrt{8}$. Общее решение имеет вид: $y = C_1 \cos\sqrt{8}x + C_2 \sin\sqrt{8}x$.

Найдем частное решение для задачи Коши с начальными условиями $x_0 = 0; \; y(0) = 0; \; y'(0) = \sqrt{8}$. Дифференцируем общее решение:

$$y' = -\sqrt{8}C_1 \sin\sqrt{8}x + \sqrt{8}C_2 \cos\sqrt{8}x.$$

Подставляем начальные условия в y и y' (учитывая, что $\cos 0 = 1, \; \sin 0 = 0$):

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ \sqrt{8}C_2 = \sqrt{8}. \end{cases}$$

Отсюда $(C_1 = 0; \; C_2 = 1)$. Соответствующее частное решение $y = \sin\sqrt{8}x$.

8.4. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения

Определение. Для линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \;\Leftrightarrow\; L(y) = f(x)$$

соответствующим однородным уравнением называется уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \;\Leftrightarrow\; L(Y) = 0.$$

Можно доказать, что относительно структуры общего решения неоднородного линейного уравнения справедлива следующая

Теорема 4. *Общее решение неоднородного уравнения* $y_{\text{он}}$ *представимо суммой общего решения соответствующего однородного уравнения* $y_{\text{оо}}$ *и частного решения неоднородного уравнения* $y_{\text{чн}}$: $\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}}$.

Доказательство. Поскольку

$$L(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}) = L(y_{\text{оо}}) + L(y_{\text{чн}}) = 0 + f(x) = f(x),$$

то $y_{\text{он}}$ действительно является решением неоднородного уравнения. Далее, $y_{\text{он}}$ зависит от произвольных постоянных C_1 и C_2, поскольку от них зависит функция $y_{\text{оо}}$.

Остается убедиться, что за счет выбора значений этих постоянных можно получить решение задачи Коши с любыми наперед заданными начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Поскольку $y_{\text{оо}}$ — <u>общее</u> решение соответствующего однородного уравнения, то можно выбрать такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых

$$y_{\text{оо}}(x_0) = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0);$$

и

$$y'_{\text{оо}}(x_0) = y'_0 - y'_{\text{чн}}(x_0).$$

Тогда для функции $y_{\text{он}}$ при этих значениях C_1 и C_2:

$$y_{\text{он}}(x_0) = y_{\text{оо}}(x_0) + y_{\text{чн}}(x_0) = (y_0 - y_{\text{чн}}(x_0)) + y_{\text{чн}}(x_0) = y_0$$

и

$$y'_{\text{он}}(x_0) = y'_{\text{оо}}(x_0) + y'_{\text{чн}}(x_0) = (y'_0 - y'_{\text{чн}}(x_0)) + y'_{\text{чн}}(x_0) = y'_0. \blacksquare$$

9. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Согласно изложенному в п. 8.4, его общее решение представимо в виде $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \qquad (22)$$

с произвольными постоянными $C_1,\ C_2$. Функции $y_1(x),\ y_2(x)$, в зависимости от корней характеристического уравнения, имеют вид:

(а) $y_1 = e^{z_1 x}, \quad y_2 = e^{z_2 x}$ — при $D > 0$, $z_1 \neq z_2$;

(б) $y_1 = e^{z_1 x}, \quad y_2 = xe^{z_1 x}$ — при $D = 0$, $z_1 = z_2$;

(в) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ — при $D < 0$,

$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Таким образом, остается найти какое-либо частное решение исходного неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}$. Метод вариации произвольных постоянных, предложенный Лагранжем, предполагает отыскание $y_{\text{чн}}$ в виде, аналогичном (22), но уже с переменными множителями при y_1 и y_2:

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Здесь $C_1(x),\ C_2(x)$ — подлежащие определению неизвестные функции.

Вычислим производные частного решения (аргумент x для краткости опускаем):

$$y'_{\text{чн}} = C_1{}' y_1 + C_1 y_1' + C_2{}' y_2 + C_2 y_2'.$$

Наложим на функции $C_1,\ C_2$ условие:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0; \tag{23}$$

тогда

$$y'_{\text{чн}} = C_1 y'_1 + C_2 y'_2.$$

Дифференцируем повторно:

$$y''_{\text{чн}} = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2.$$

Подставим выражения для $y_{\text{чн}},\ y'_{\text{чн}},\ y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение и сгруппируем по отдельности слагаемые с C_1 и с C_2:

$$C_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + C_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).$$

Множители при C_1 и C_2 равны тождественно нулю, поскольку функции y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения, так что

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x). \tag{24}$$

Соотношения (23) и (24) дают систему двух уравнений относительно неизвестных $C'_1,\ C'_2$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y'_1 + C_2' y'_2 = f(x). \end{cases} \tag{25}$$

Решая эту систему, получим выражения для $C'_1,\ C'_2$ через уже известные функции $y_1,\ y_2,\ y'_1,\ y'_2$, после чего сами функции $C_1(x),\ C_2(x)$ находятся интегрированием.

В качестве итога сформулируем *алгоритм решения неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных*:

1. Решение соответствующего однородного уравнения, получение функций $y_1,\ y_2$.

2. Запись общего решения соответствующего однородного уравнения в виде $y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

3. Вычисление производных y_1', y_2'.

4. Запись системы (25) для отыскания C_1', C_2'.

5. Решение системы, получение функций C_1', C_2'.

6. Нахождение каких-либо первообразных $C_1(x)$, $C_2(x)$ интегрированием функций C_1', C_2'.

7. Запись частного решения неоднородного уравнения в виде $y_{\text{чн}} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$.

8. Запись общего решения неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Пример. Решим методом вариации произвольных постоянных уравнение $y'' + 2y' = x$. Следуя алгоритму, последовательно получаем:

1. $y'' + 2y' = 0$; $z^2 + 2z = 0$; $z_1 = -2,\ z_2 = 0$;

$y_1 = e^{-2x}$; $y_2 = 1$.

2. $y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2$.

3. $y_1' = -2e^{-2x}$; $y_2' = 0$.

4. $\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' \cdot 1 = 0 \\ C_1'(-2e^{-2x}) + 0 = x. \end{cases}$

5. $C_1' = -\dfrac{1}{2} x e^{2x}$; $C_2' = \dfrac{1}{2} x$.

6. Интегрируя по частям, имеем:

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}\int xe^{2x}dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}xe^{2x}+\frac{1}{8}e^{2x}=e^{2x}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\right).$$

$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{4}x^2.$$

7. $y_{\text{чн}}=e^{2x}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\right)e^{-2x}+\frac{1}{4}x^2\cdot 1=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}.$

8. $y_{\text{он}}=y_{\text{оо}}+y_{\text{чн}}=C_1e^{-2x}+C_2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}.$

10. Метод неопределенных коэффициентов

Это метод отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x)$$

в случае, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, самая общая запись которого:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right), \tag{26}$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно:

$$P_m(x)=p_0x^m+p_1x^{m-1}+\ldots+p_{m-1}x+p_m$$

$$Q_n(x)=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\ldots+q_{n-1}x+q_n.$$

Укажем характерные частные случаи функции (26).

1. $\alpha=0;\ \beta=0$. В этом случае правая часть $f(x)=P_m(x)$ является многочленом (поскольку $e^0=1;\ \cos 0=1,\ \sin 0=0$). Например:

1) $y'' + py' + qy = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$$y'' + py' + qy = e^{0x}[(3x^2 - 4)\cos(0x) + 0\sin(0x)];$$

2) $y'' + py' + qy = -3 \Leftrightarrow$

$$y'' + py' + qy = e^{0x}[-3\cos(0x) + 0\sin(0x)].$$

2. $\alpha = 0$. В этом случае $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$.

Например:

$$y'' + py' + qy = 4\cos x;$$

$$y'' + py' + qy = -3\cos x + 7x^3 \sin x.$$

3. $\beta = 0;\ P_m(x) = 1$. В этом случае $f(x) = e^{\alpha x}$. Например:

$$y'' + py' + qy = e^{-x};$$

$$y'' + py' + qy = e^{\pi x}.$$

4. $Q_n(x) = 0$. В этом случае $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)\cos\beta x$. В частности, если степень многочлена $m = 0$, то многочлен является постоянным числом: $P_0(x) = p_0 \neq 0$

Например:

$$y'' + py' + qy = -8e^{-9x}\cos x;$$

$$y'' + py' + qy = e^{2x}(5x + 1)\cos 12x.$$

5. $P_m(x) = 0$. В этом случае $f(x) = e^{\alpha x} Q_n(x)\sin\beta x$. Например:

$$y'' + py' + qy = \sin 2x;$$

$$y'' + py' + qy = e^{2x}(5x + 1)\sin 12x.$$

Рассмотрим комплексное число $r = \alpha + \beta i$, где α и β берутся из записи (26) правой части $f(x)$ неоднородного уравнения. Корни характеристического уравнения $z^2 + pz + q = 0$ записываются в виде

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2} i,$$

где D — дискриминант уравнения.

Кратность k числа r как корня характеристического уравнения может иметь одно из трех значений:

1) $k = 0$; это означает, что r не является корнем характеристического уравнения;

2) $k = 1$; это означает, что r является простым корнем характеристического уравнения; при этом дискриминант уравнения D отличен от нуля;

3) $k = 2$, то есть r — кратный корень; последнее возможно в том и только том случае, когда $D = 0$; корень r при этом вещественный, так как его мнимая часть $\beta = \dfrac{\sqrt{|D|}}{2} = 0$.

На практике для определения кратности k нужно решить (квадратное) характеристическое уравнение и сравнить его корни с числом r.

Пусть l — максимальная из степеней m и n многочленов P_m и Q_n в записи правой части (26).

Можно убедиться непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение, что функция

$$y_{\text{чн}} = x^k e^{\alpha x} (A_l(x) \cos \beta x + B_l(x) \sin \beta x), \tag{27}$$

где A_l и B_l — многочлены степени l:

$$A_l = a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + a_2 x^{l-2} + \ldots + a_{l-1} x + a_l,$$

$$B_l = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + b_2 x^{l-2} + \ldots + b_{l-1} x + b_l,$$

при некоторых значениях коэффициентов a_i, b_i этих многочленов является частным решением неоднородного уравнения. Для отыскания этих (неопределенных вначале) коэффициентов у функции (27) вычисляются первая и вторая производные; затем $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ подставляются в исходное уравнение, после чего приравниваются коэффициенты при одинаковых функциях-слагаемых обеих частей равенства. Это дает систему уравнений для отыскания коэффициентов a_i, b_i.

В итоге отыскание частного решения проводится по следующему алгоритму:

1. Нахождение корней характеристического уравнения.

2. Определение величин α, β, m, n, l.

3. Выявление кратности k числа $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения.

4. Запись частного решения $y_{\text{чн}}$ в виде (27) с неопределенными коэффициентами многочленов A_l, B_l.

5. Вычисление производных $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$.

6. Подстановка $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в дифференциальное уравнение.

7. Приравнивание коэффициентов при одинаковых функциях в обеих частях равенства.

8. Решение получившейся системы уравнений, получение коэффициентов многочленов A_l, B_l.

9. Запись частного решения с найденными коэффициентами.

После этого можно записать общее решение в виде $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение $y'' + 2y' = 20x + 2$.

Выполняем последовательно инструкции алгоритма:

1. $z^2 + 2z = 0$; $z_1 = -2$; $z_2 = 0$. Общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{\text{оо}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{0x} = C_1 e^{-2x} + C_2$.

2. Находим параметры правой части:

$$20x + 2 = e^{0x}\left((20x+2)\cos(0x) + 0\sin(0x)\right);$$

$$\alpha = 0;\ \beta = 0;\ m = 1;\ n = 0;\ l = 1.$$

3. $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$; кратность $k = 1$.

4. $y_{\text{чн}} = xA_1(x) = x(a_0 x + a_1) = a_0 x^2 + a_1 x$.

5. $y'_{\text{чн}} = 2a_0 x + a_1$; $y''_{\text{чн}} = 2a_0$.

6. Подставляем в уравнение: $2a_0 + 2(2a_0 x + a_1) = 20x + 2$.

7. $4a_0 x + 2(a_0 + a_1) = 20x + 2$;

8. $\begin{cases} 4a_0 = 20 \\ 2(a_0 + a_1) = 2 \end{cases}$; $a_0 = 5$; $a_1 = -4$.

9. $y_{\text{чн}} = x(5x - 4) = 5x^2 - 4x$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-2x} + C_2 + 5x^2 - 4x.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 10y' + 21y = e^{6x}\left(-3x^2 + 4x + 2\right).$$

Выполняем последовательно инструкции алгоритма:

1. $z^2 - 10z + 21 = 0;\ z_1 = 3;\ z_2 = 7$. Общее решение соответствующего однородного уравнения: $y_{\text{оо}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x}$.

2. Находим параметры правой части:

$$e^{6x}\left(-3x^2 + 4x + 2\right) = e^{6x}\left(\left(-3x^2 + 4x + 2\right)\cos(0x) + 0\sin(0x)\right);$$

$$\alpha = 6;\ \beta = 0;\ m = 2;\ n = 0;\ l = 2.$$

3. $\alpha + \beta i = 6 + 0i = 6$; кратность $k = 0$.

4. $y_{\text{чн}} = x^0 e^{6x} A_2(x) = e^{6x}\left(a_0 x^2 + a_1 x + a_2\right);$

5. $y'_{\text{чн}} = 6e^{6x}\left(a_0 x^2 + a_1 x + a_2\right) + e^{6x}\left(2a_0 x + a_1\right) =$

$$= e^{6x}\left(6a_0 x^2 + (2a_0 + 6a_1)x + (a_1 + 6a_2)\right);$$

$$y''_{\text{чн}} = e^{6x}\left(36a_0 x^2 + (24a_0 + 36a_1)x + (2a_0 + 12a_1 + 36a_2)\right).$$

6. Подставляем в уравнение:

$$e^{6x}\left(36a_0 x^2 + (24a_0 + 36a_1)x + (2a_0 + 12a_1 + 36a_2)\right) -$$
$$-10e^{6x}\left(6a_0 x^2 + (2a_0 + 6a_1)x + (a_1 + 6a_2)\right) +$$
$$+21e^{6x}\left(a_0 x^2 + a_1 x + a_2\right) = e^{6x}\left(-3x^2 + 4x + 2\right).$$

7. Приводим подобные члены и приравниваем коэффициенты при $x^2 e^{6x}$, при xe^{6x} и при e^{6x}:

$$\begin{cases} -3a_0 = -3 \\ 4a_0 - 3a_1 = 4 \\ 2a_0 + 2a_1 - 3a_2 = 2. \end{cases}$$

8. Решаем систему: $a_0 = 1;\ \ a_1 = 0;\ \ a_2 = 0$.

9. $y_{\text{чн}} = e^{6x}\left(x^2 + 0x + 0\right) = x^2 e^{6x}$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x} + x^2 e^{6x}.$$

3. Рассмотрим уравнение $y'' + 4y = 2\cos x - 5\sin x$.

1. $z^2 + 4 = 0;\ \ z_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}i = 0 \pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = e^{0x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2. Находим параметры правой части:

$$2\cos x - 5\sin x = e^{0x}\left(P_0(x)\cos x + Q_0(x)\sin x\right);$$

$$\alpha = 0;\ \ \beta = 1;\ \ m = 0;\ \ n = 0;\ \ l = 0.$$

3. $\alpha + \beta i = 0 + 1i$; кратность $k = 0$.

4. $y_{\text{чн}} = x^0 e^{0x}\left(a_0\cos x + b_0\cos x\right) = a_0\cos x + b_0\cos x$;

5. $y'_{\text{чн}} = -a_0\sin x + b_0\cos x$;

$$y''_{\text{чн}} = -a_0\cos x - b_0\sin x.$$

6. Подставляем в уравнение:

$$-a_0\cos x - b_0\sin x + 4(a_0\cos x + b_0\sin x) = 2\cos x - 5\sin x;$$

$$3a_0\cos x + 3b_0\sin x = 2\cos x - 5\sin x.$$

7. Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и при $\sin x$:

$$\begin{cases} 3a_0 = 2 \\ 3b_0 = -5. \end{cases}$$

8. $a_0 = \dfrac{2}{3};\ \ b_0 = -\dfrac{5}{3}$.

9. $y_{\text{чн}} = \frac{2}{3}\cos x - \frac{5}{3}\sin x$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{2}{3}\cos x - \frac{5}{3}\sin x.$$

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1–2. — Интеграл-Пресс, 2005. — 416 с.

2. Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 1, 2. — М.: «Оникс 21 век». — 2003.

3. Волков Н. И., Голоскоков П. Г., Шкадова А. Р. Матрицы, определители и системы линейных уравнений: учебное пособие. — СПб.: СПГУВК, 2006.

4. Ястребов М. Ю. Производная и исследование функций. — СПб.: СПГУВК, 2003. — 45 с.

5. Ястребов М. Ю. Неопределенный и определенный интегралы. СПб.: СПГУВК, 2004. — 55 с.

6. Ястребов М. Ю. Функции нескольких переменных. — СПб.: СПГУВК, 2006. — 48 с.

7. Лащенов В. К. Комплексные числа. — СПб.: СПГУВК, 2010. — 8 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ястребов *Михаил Юрьевич*

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.12.11 Сдано в производство 08.12.11
Формат 60×84 1/16 Усл.-печ. л. 2,49. Уч.-изд. л. 2,15.
Тираж 100 экз. Заказ № 179

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций
198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

Отпечатано в типографии ФБОУ ВПО СПГУВК
198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2