М. Ю. Ястребов

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ЧАСТЬ II
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНЫХ КОММУНИКАЦИЙ»

М.Ю. Ястребов

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Санкт-Петербург
2005

УДК 519.2
ББК 22.171

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент
Кузнецов В.О.

Ястребов М. Ю.

Математика. Теория вероятностей. Часть II. Случайные величины: Учебное пособие. – СПб: СПГУВК, 2005 – 66 С.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса экономических и технических специальностей. Оно соответствует рабочей программе дисциплины «Математика» и может быть использовано как при подготовке к экзамену, так и для текущих учебных занятий.

УДК 519.2
ББК 22.171

ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Понятие случайной величины

Определение. *Случайной величиной* называется числовая величина, удовлетворяющая двум условиям:

1) в результате испытания она принимает неизвестные наперед значения;

2) принятие ею значения, лежащего в каком-либо наперед заданном промежутке, является случайным событием, имеющим определенную вероятность.

Замечание. Второе условие означает, что в теории вероятностей рассматриваются в качестве специальных объектов — случайных величин — не любые величины с неизвестными наперед значениями, а только такие, которые:

— *во-первых*, связаны с многократно воспроизводимыми (в неизменных контролируемых условиях) испытаниями;

— *во-вторых*, принимают значения из любого наперед заданного диапазона с относительной частотой, которая проявляет при большом числе испытаний свойство устойчивости [13, п.2.4].

Будем обозначать случайные величины прописными латинскими буквами: X, Y, Z и т. п.

1.2. Функция распределения случайной величины

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, заданная при каждом $x \in (-\infty, +\infty)$ формулой:

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}\,.$$

Таким образом, $F(x)$ выражает вероятность случайного события, которое заключается в том, что в результате испытания случайная величина X примет значение, меньшее аргумента x.

Свойства функции распределения.

1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* $[0, 1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

Действительно, $F(x)$ есть вероятность некоторого случайного события, а вероятность всегда лежит в указанных пределах [13, п.3.2]. ■

2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Введем случайные события:

$$A=(X<a),\ \ B=(X<b),\ \ C=(a\le X<b),$$

так что

$$F(a)=P(A),\ \ F(b)=P(B).$$

Тогда $B=A+C$, и правая часть есть сумма несовместных событий (рис. 1). Отсюда:

$$P(B)=P(A)+P(C),\ \text{и}\ \ P(C)=P(B)-P(A).\ ■$$

3. *Функция распределения $F(x)$ является неубывающей:*

$$F(a)\le F(b)\ \text{при}\ \ a<b.$$

Доказательство. В предыдущих обозначениях событие A влечет за собой событие B: $A\subset B$. Следовательно, по свойству вероятности [13, п.3.2], выполняется неравенство $P(A)\le P(B)$, то есть $F(a)\le F(b)$. ■

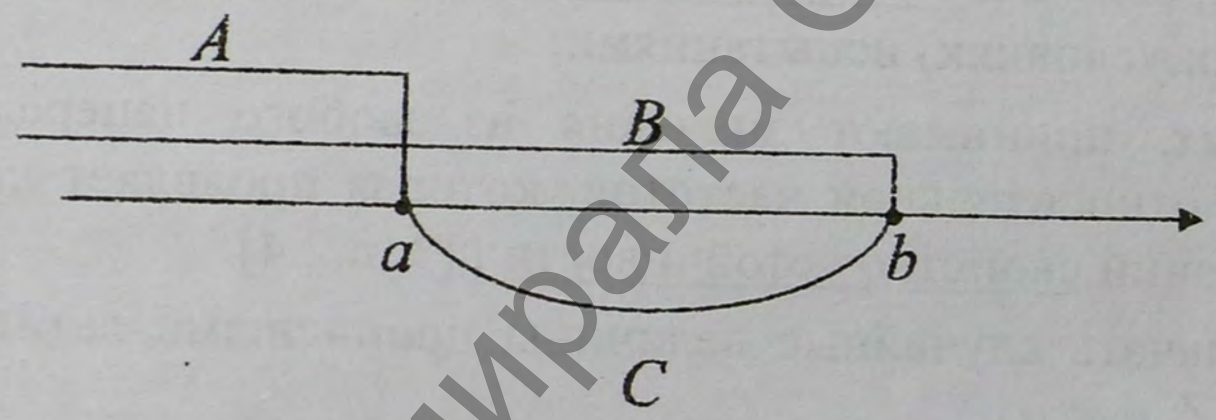

Рис.1.

4. *Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$, то:*

$F(x)=0$ *при* $x<a$;

$F(x)=1$ *при* $x>b$.

Доказательство. При $x\le a$ событие $(X<x)$ является невозможным; поэтому $F(x)=P(X<x)=P(\varnothing)=0$. При $x>b$ событие $(X<x)$ является достоверным; поэтому

$$F(x)=P(X<x)=P(\Omega)=1.\ ■$$

Укажем без доказательства следующие свойства:

5. *Поведение на бесконечности*:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0;\ \ \lim_{x\to+\infty}F(x)=1,\ \text{или}\ \ F(-\infty)=0;\ \ F(+\infty)=1.$$

6. *Функция распределения непрерывна слева*, то есть для каждого x_0 левосторонний предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), \text{ или в другой записи: } F(x_0 - 0) = F(x_0).$$

1.3. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Случайная величина X называется *дискретной*, если все ее возможные значения можно представить в виде конечной или бесконечной последовательности: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Определение. *Законом распределения* дискретной случайной величины X называется таблица (конечная или бесконечная), содержащая все ее возможные значения x_i и вероятности принятия этих значений $p_i = P(X = x_i)$:

$X:$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$P:$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Будем обозначать закон распределения также в виде:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots;\ p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \text{ или } (x_i; p_i).$$

Примеры. 1. Испытание: бросание игральной кости. Случайная величина X — количество выпавших очков. Возможные значения — числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Для каждого из этих значений схема равновозможных исходов дает вероятность 1/6. Закон распределения имеет вид:

$X:$	1	2	3	4	5	6
$P:$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2. Испытание: три раза бросается монета. Случайная величина X — количество выпадений герба. Возможные значения – числа $0, 1, 2, 3$. Вероятности значений находятся по схеме Бернулли как вероятности числа успехов (см. [13], п. 3.11), где вероятность успеха в отдельном испытании $p = 1/2$, вероятность неудачи $q = 1 - p = 1/2$:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(1/2\right)^0 \cdot \left(1/2\right)^3 = \frac{1}{8};$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = 3/8;$$

$$P(X=2)=P_3(2)=3/8;$$

$$P(X=3)=P_3(3)=1/8.$$

Закон распределения имеет вид:

$X:$	0	1	2	3
$P:$	1/8	3/8	3/8	1/8

3. Испытание: Стрельба по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0.6. Случайная величина X — количество произведенных выстрелов. Возможные значения: $1, 2, \ldots, n, \ldots$; множество значений бесконечно. Найдем вероятности этих значений, считая результаты отдельных выстрелов независимыми событиями.

Если первое попадание произошло при n-м выстреле, то первые $n-1$ выстрелов были промахами, а последний, n-й, — попаданием. Введем события A_n — попадание при n-м выстреле ($n=1, 2, \ldots$), так что

$$P(A_n)=0.6,\quad P(\overline{A_n})=1-0.6=0.4.$$

Тогда по теореме умножения для независимых событий (см. [13], п. 3.8):

$$P(X=n)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{n-1}\,A_n)=0.4^{n-1}\cdot 0.6.$$

Теорема. *Сумма вероятностей закона распределения дискретной случайной величины равна* 1:

$$\boxed{\sum_i P(X=x_i)=1}. \qquad (1)$$

(если множество возможных значений бесконечна, то сумма в (1) понимается как сумма ряда, то есть как предел частичных сумм).

Доказательство. События $(X=x_i)$ при разных i попарно несовместны. Поскольку одно из возможных значений обязательно реализуется в результате испытания, то $\sum\limits_i (X=x_i)=\Omega$. Тогда

$$\sum_i P(X=x_i)=P\left(\sum_i (X=x_i)\right)=P(\Omega)=1. \blacksquare$$

1.4. Функция распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим задачу нахождения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X на примере следующего закона распределения:

$X:$	-1	1	2	4
$P:$	0.2	0.3	0.4	0.1

Четыре возможных значения случайной величины разбивают числовую ось на пять промежутков. Рассмотрим поочередно возможные случаи расположения аргумента x.

1. Если $x \le -1$, то событие $(X < x)$ является невозможным, в том числе и для крайней точки промежутка $x = -1$. Поэтому $F(x) = P(X < x) = P(\varnothing) = 0$.

2. Если $-1 < x \le 1$, то событие $(X < x)$ совпадает с событием $(X = -1)$, поскольку левее x имеется лишь одно возможное значение случайной величины, а именно, -1. Значит,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0.2.$$

3. Если $1 < x \le 2$, то событие $(X < x)$ означает, что $(X = -1)$ или $(X = 1)$, поскольку левее x имеются только два возможных значения случайной величины X. Таким образом, имеем для этого случая: $(X < x) = (X = -1) + (X = 1)$ — сумма несовместных событий. Значит,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5.$$

4. Если $2 < x \le 4$, то событие $(X < x)$ означает, что $(X = -1)$, или $(X = 1)$, или $(X = 2)$, поскольку левее x имеются три указанных значения. Таким образом, в этом случае:

$$(X < x) = (X = -1) + (X = 1) + (X = 2)$$

— сумма попарно несовместных событий. Значит,

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$= 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9.$$

5. Наконец, при $x > 4$ событие $(X < x)$ является достоверным, поскольку все возможные значения случайной величины лежат левее x. Следовательно,

$$F(x) = P(X < x) = P(\Omega) = 1.$$

Итак, график функции распределения имеет ступенчатый характер (рис. 2). Точка на правом конце каждой «ступеньки» означает, что именно на ней находится точка графика с данной абсциссой. Наоборот, стрелка на левом конце указывает, что крайняя левая точка «выколота». Таким образом, значения функции вблизи слева от аргумента x совпадают со значением функции в самой точке x, и, значит, имеют место непрерывность слева и разрыв первого рода (скачок) справа.

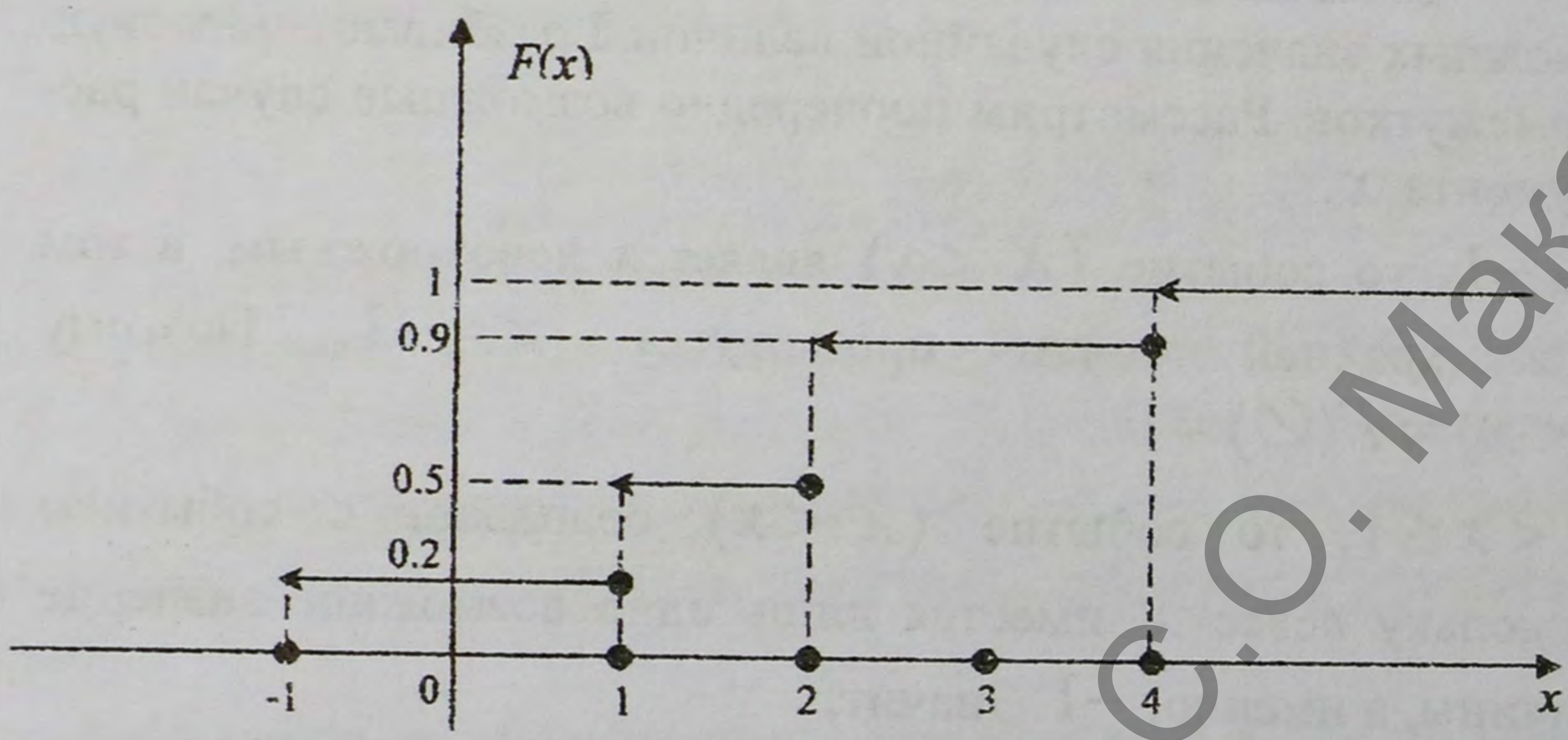

Рис.2.

График на рис. 2 наглядно иллюстрирует общие свойства функции распределения, описанные в п.1.2.

1.5. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями, соответственно, $p_1, p_2, ..., p_n$. Если при проведении N испытаний значение x_i появилось, k_i раз (так что $k_1 + k_2 + ... + k_n = N$), то среднее арифметическое $\overline{X}$ реализованных значений представляется в виде:

$$\overline{X} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n}{N} = \frac{k_1}{N} x_1 + \frac{k_2}{N} x_2 + ... + \frac{k_n}{N} x_n.$$

Отношение $\dfrac{k_i}{N} = w_i$ является относительной частотой события $(X = x_i)$. При большом числе испытаний относительные частоты w_i колеблются вокруг соответствующих теоретических вероятностей p_i. Поэтому $\overline{X}$ колеблется вокруг значения

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n.$$

Это является основанием для следующего определения.

Определение. 1. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X с конечным множеством значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и с вероятностями этих значений, соответственно, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется число

$$\boxed{M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}, \tag{2}$$

или в краткой записи

$$\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}.$$

2. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X с бесконечным множеством значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ называется сумма ряда

$$\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i}. \tag{3}$$

При этом предполагается, что ряд является *абсолютно сходящимся* (то есть, существует предел последовательности частичных сумм, составленных из модулей его членов). Если абсолютной сходимости нет, то считают, что математическое ожидание не существует.

Статистический смысл математического ожидания: $M(X)$ *— это число, вокруг которого колеблется среднее арифметическое реализованных значений случайной величины при большом числе испытаний.*

Пример. Пусть дискретная случайная величина имеет закон распределения:

$X:$	-1	1	2	4
$P:$	0.2	0.3	0.4	0.1

Тогда $M(X) = 0.2 \cdot (-1) + 0.3 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.1 \cdot 4 = 1.3$.

В соответствии с эмпирическим законом больших чисел, следует ожидать, что при большом числе испытаний среднее арифметическое реализованных значений случайной величины окажется близким к числу 1.3.

1.6. Свойства математического ожидания.

1. *Если случайная величина* X *является постоянной («неслучайной») величиной:* $X = a$, *то есть имеет закон распределения*

$X:$	a

$P:$	1

то $M(X)=a$, *или* $\boxed{M(a)=a}$.

Доказательство. По определению $M(X)=1\cdot a=a$. ■

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:* $\boxed{M(kX)=kM(X)}$.

Доказательство. Ограничимся случаем конечного множества значений. Пусть закон распределения имеет вид:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n).$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) $k=0$. Тогда kX имеет закон распределения

$kX:$	0
$P:$	1

так что $M(kX)=M(0)=0$, и также $kM(X)=0\cdot M(X)=0$.

2) $k\neq 0$. Тогда условия $kX=kx_i$ и $X=x_i$ равносильны, и поэтому

$$(kX=kx_i)=(X=x_i);\quad P(kX=kx_i)=P(X=x_i)=p_i.$$

Следовательно, закон распределения закон распределения случайной величины kX имеет вид:

$$(kx_1,kx_2,\dots,kx_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n).$$

Поэтому

$$M(kX)=\sum_{i=1}^{n}p_ikx_i=k\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=kM(X). \ ■$$

3. Теорема сложения для математического ожидания.

Пусть случайные величины X *и* Y *имеют математические ожидания* $M(X)$ *и* $M(Y)$. *Тогда*

$$\boxed{M(X+Y)=M(X)+M(Y)}.$$

Доказательство. Ограничимся случаем конечного множества значений. Пусть законы распределения для X и Y имеют вид:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n;\ p_1,p_2,\dots,p_n);$$

$$(y_1,y_2,\dots,y_r;\ q_1,q_2,\dots,q_r).$$

Случайная величина $X+Y$ принимает nr значений вида x_i+y_j, где $i=1,2,...,n;\quad j=1,2,...,r$. Ограничимся для простоты случаем, когда все эти значения различны. Пусть $p_{ij}=P(X+Y=x_i+y_j)$ — вероятности указанных значений. Тогда

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}p_{ij}(x_i+y_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}p_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}p_{ij}y_j.$$

Производя в каждой из двойных сумм группировку слагаемых и вынося за знак внутренней суммы общий множитель (x_i и y_j, соответственно), получаем:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\sum_{j=1}^{r}p_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{r}\left(y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right).$$

Убедимся теперь, что $\sum_{j=1}^{r}p_{ij}=p_i$. Для этого введем события:

$$A=(X=x_i);\quad H_1=(Y=y_1);\ H_2=(Y=y_2);\ ...\ ;\ H_r=(Y=y_r).$$

События $H_j\ \ (j=1,...,r)$, а значит, и AH_j попарно несовместны, поэтому (сумма вероятностей событий равна вероятности их суммы):

$$\sum_{j=1}^{r}p_{ij}=\sum P\big((X=x_i)(Y=y_j)\big)=\sum_{j=1}^{r}P(AH_j)=$$

$$=P(AH_1+AH_2+...+AH_n)=P\big(A(H_1+H_2+...+H_n)\big)=$$

$$=P(A\Omega)=P(A)=p_i.$$

Аналогично $\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=q_j$. Тогда

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum y_jq_j=M(X)+M(Y).\ \blacksquare$$

4. Теорема умножения для математического ожидания.

Определение. 1. Случайные величины $X_1,X_2,...,X_n$ называются *независимыми*, если для любых промежутков

$$\langle a_1, b_1 \rangle,\ \langle a_2, b_2 \rangle, \ldots, \langle a_n, b_n \rangle$$

независимы в совокупности события

$$(X_1 \in \langle a_1, b_1 \rangle),\ (X_2 \in \langle a_2, b_2 \rangle), \ldots,\ (X_n \in \langle a_n, b_n \rangle).$$

2. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, образующие бесконечную последовательность, называются *независимыми*, если для любого натурального n любые n случайных величин этой последовательности независимы.

Замечание. В частности, если X и Y независимы, то для любых чисел a и b:

$$P\big((X = a)(Y = b)\big) = P\big((x \in [a, a])(Y \in [b, b])\big) =$$
$$= P(X \in [a, a])P(Y \in [b, b]) = P(X = a)P(Y = b).$$

Теорема. *Пусть случайные величины* X *и* Y *независимы и имеют математические ожидания* $M(X)$ и $M(Y)$. *Тогда*

$$\boxed{M(XY) = M(X)M(Y)}.$$

Доказательство. Ограничимся случаем конечного множества значений. Пусть законы распределения для X и Y имеют вид:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n);$$
$$(y_1, y_2, \ldots, y_r;\ q_1, q_2, \ldots, q_r).$$

Случайная величина XY принимает nr значений вида $x_i y_j$, где $i = 1, 2, \ldots, n;\quad j = 1, 2, \ldots, r$. Ограничимся для простоты случаем, когда все эти произведения различны. Обозначим через p_{ij} вероятности этих значений. Тогда, поскольку вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей,

$$p_{ij} = P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j.$$

Далее,

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} p_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} p_i q_j x_i y_j.$$

Производя в двойной сумме группировку слагаемых и вынося за знак внутренней суммы общий множитель $p_i x_i$, получаем:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i x_i \sum_{j=1}^{r} q_j y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i M(Y)=$$

$$=M(Y)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M(Y)M(X). \blacksquare$$

1.7. Дисперсия дискретной случайной величины

Рассмотрим следующий пример. Пусть случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения:

$X:$	-2	-1	0	1	2
$P:$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

$Y:$	-200	-100	0	100	200
$P:$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Нетрудно проверить, что они имеют равные математические ожидания: $M(X)=M(Y)=0$. В то же время рассеивание значений вокруг математического ожидания у Y явно больше, чем у X. Это рассеивание выражается отклонениями реализованных значений от математического ожидания, то есть разностями $x_i - M(X)$ и $y_i - M(Y)$, соответственно.

Определение. Пусть у случайной величины X существует математическое ожидание $M(X)$. Случайная величина $X - M(X)$ со значениями $x_i - M(X)$ называется *отклонением* (от математического ожидания).

Если при большом числе реализаций случайной величины просуммировать полученные отклонения, то их значения разных знаков в значительной степени погашают друг друга, и такая сумма не может служить мерой рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания. Для того чтобы избежать подобного взаимного погашения, отклонения перед суммированием возводят в квадрат.

Определение. Пусть у случайной величины X существует математическое ожидание $M(X)$. Ее *дисперсией* называется число

$$\boxed{D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right)}, \tag{4}$$

то есть математическое ожидание квадрата отклонения.

Статистический смысл дисперсии:

Дисперсия служит мерой рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Общее определение дисперсии принимает применительно к дискретной случайной величине следующий вид:

1) Если X является дискретной случайной величиной с конечным множеством значений и законом распределения

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

то отклонение $X - M(X)$ имеет закон распределения

$$(x_1 - M(X), x_2 - M(X), \ldots, x_n - M(X);\ \ p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

и, в соответствии с определением математического ожидания:

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - M(X)\right)^2}. \tag{5}$$

2) Если X является дискретной случайной величиной с бесконечным множеством значений и законом распределения

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots;\ \ p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots),$$

то

$$\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(x_i - M(X)\right)^2}. \tag{6}$$

Если ряд в правой части (6) расходится, то считают, что дисперсия не существует.

Замечание. Если у случайной величины не существует математического ожидания, то понятие дисперсии для нее не вводится.

Пример. 1. Пусть закон распределения имеет вид:

$X:$	-2	0	1
$P:$	0.1	0.5	0.4

.

Вычисление дисперсии предполагает предварительное вычисление математического ожидания:

$$M(X) = 0.1 \cdot (-2) + 0.5 \cdot 0 + 0.4 \cdot 1 = 0.2.$$

Далее,

$$D(X) = 0.1 \cdot (-2 - 0.2)^2 + 0.5 \cdot (0 - 0.2)^2 + 0.4 \cdot (1 - 0.2)^2 = 1.08.$$

2. Для приведенных в начале этого параграфа законов распределения получаем:

$$M(X) = M(Y) = 0;$$

$$D(X) = 0.2 \cdot \left((-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\right) = 2;$$

$$D(Y) = 0.2 \cdot \left((-200)^2 + (-100)^2 + 0^2 + 100^2 + 200^2\right) = 20000.$$

Среднее квадратическое отклонение. В случае, когда случайная величина X имеет размерность (метры, килограммы и т. п.), размерность дисперсии $D(X)$ равна квадрату размерности X. Поэтому наряду с дисперсией в качестве меры рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания применяют также арифметический квадратный корень из дисперсии. Последний уже имеет размерность, совпадающую с размерностью X.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X, называется число

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

1.8. Свойства дисперсии

1. *Для дисперсии справедлива формула:*

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}. \qquad (7)$$

Доказательство. По свойствам математического ожидания

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M\left(X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2\right) =$$

$$= M\left(X^2\right) + M(-2X \cdot M(X)) + M\left((M(X))^2\right).$$

Во втором слагаемом постоянный множитель $-2M(X)$ вынесем за знак математического ожидания; в третьем слагаемом математическое ожидание константы $(M(X))^2$ равно самой этой константе. В результате получаем:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-2M(X)M(X)+\left(M(X)\right)^2=$$
$$=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2. \blacksquare$$

неотриц.

2. $\boxed{D(X)\geq 0}$.

Действительно, формулы (5) и (6) приводят к суммам неотрицательных слагаемых. ■

D(kX)

3. $\boxed{D(kX)=k^2D(X)}$.

Доказательство. Применим формулу (7):

$$D(kX)=M\left((kX)^2\right)-\left(M(kX)\right)^2=M\left(k^2X^2\right)-\left(kM(X)\right)^2=$$
$$=k^2M\left(X^2\right)-k^2\left(M(X)\right)^2=k^2\left(M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2\right)=$$
$$=k^2D(X). \blacksquare$$

раб-зор

4. *Если случайная величина* X *является постоянной («неслучайной») величиной:* $X=a=const$, *то есть имеет закон распределения*

$X:$	a
$P:$	1

то $D(X)=0$.

Доказательство. По свойству математического ожидания $M(X)=a,\ M\left(X^2\right)=a^2$. Поэтому в формуле (7) для дисперсии

$$D(X)=M(a^2)-\left(M(a)\right)^2=a^2-a^2=0. \blacksquare$$

5. Обратно, если $D(X)=0$, то случайная величина X является постоянной: $X=a=const$.

Доказательство. Пусть, X — дискретная случайная величина, и $D(X)=0$. Если бы она с ненулевыми вероятностями принимала по крайней мере два разных значения, то есть имела закон распределения $(x_1,x_2,...;\ p_1,p_2,...)$, то

$$D(X)=p_1(x_1-M(X))^2+p_2(x_2-M(X))^2+...>0,$$

поскольку, по крайней мере, одно слагаемое строго больше нуля. ■

6. Теорема сложения для дисперсии. *Если случайные величины* X *и* Y *независимы, то* $\boxed{D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)}$.

Доказательство. По теореме умножения для математических ожиданий $M(XY) = M(X)M(Y)$. Применим к $D(X \pm Y)$ формулу (7):

$$D(X \pm Y) = M\left((X \pm Y)^2\right) - \left(M(X \pm Y)\right)^2 =$$

$$= M\left(X^2 \pm 2XY + Y^2\right) - \left(M(X) \pm M(Y)\right)^2 =$$

$$= M(X^2) \pm 2M(XY) + M(Y^2) -$$

$$-\left(M(X)\right)^2 \mp 2M(X)M(Y) - \left(M(Y)\right)^2 =$$

$$\left[M(X^2) - \left(M(X)\right)^2\right] + \left[M(Y^2) - \left(M(Y)\right)^2\right] +$$

$$\pm\left[2M(X)M(Y) - 2M(X)M(Y)\right] = D(X) + D(Y) + 0. \quad ■$$

Замечание. Аналогичное утверждение имеет место и для суммы/разности нескольких независимых случайных величин. Например,

$$D(X + Y + Z) = D((X + Y) + Z) = D(X + Y) + D(Z) =$$

$$= D(X) + D(Y) + D(Z).$$

Лемма (о независимости константы). *Если случайная величина* X *является постоянной:* $X = a = const$, *то есть с вероятностью* 1 *принимает значение* a, *то для всякой случайной величины* Y *имеет место независимость* X *и* Y.

Доказательство. Пусть $< c_1, d_1 >$ и $< c_2, d_2 >$ произвольные промежутки. Рассмотрим два возможных случая.

1. $a \in < c_1, d_1 >$. Тогда событие $(X \in < c_1, d_1 >) = \Omega$ является достоверным, и $P(X \in < c_1, d_1 >) = 1$. Далее,

$$P\left((X \in < c_1, d_1 >) \cdot (Y \in < c_2, d_2 >)\right) =$$

$$= P\left(\Omega \cdot (Y \in < c_2, d_2 >)\right) = P(Y \in < c_2, d_2 >) =$$

$$= 1 \cdot P(Y \in < c_2, d_2 >) = P\left((X \in < c_1, d_1 >\right) \cdot P(Y \in < c_2, d_2 >),$$

так что условие независимости выполнено.

2. $a \notin < c_1, d_1 >$. Тогда событие $(X \in < c_1, d_1 >) = \varnothing$ является невозможным, и $P(X \in < c_1, d_1 >) = 0$. Далее,

$$P\big((X \in <c_1, d_1>)\cdot(Y \in <c_2, d_2>)\big) =$$
$$= P\big(\varnothing\cdot(Y \in <c_2, d_2>)\big) = P(\varnothing) = 0 =$$
$$= 0\cdot P\big(Y \in <c_2, d_2>\big) = P\big((X \in <c_1, d_1>)\cdot P(Y \in <c_2, d_2>\big). \blacksquare$$

Следствие. *Если случайная величина* X *является постоянной:* $X = a = const$, *то для всякой случайной величины* Y *имеет место равенство:* $D(a+Y) = D(Y)$.

Доказательство. Поскольку случайные величины $X = a$ и Y независимы, то
$$D(a+Y) = D(a) + D(Y) = 0 + D(Y) = D(Y). \blacksquare$$

7. Математическое ожидание и дисперсия среднего арифметического.

Теорема. *Если случайные величины* $X_1, X_2, ..., X_n$ *независимы и имеют одинаковое математическое ожидание, равное* m, *и одинаковую дисперсию, равную* d, *то для их среднего арифметического* $Y = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)$ *справедливы формулы:*
$$M(Y) = m; \quad D(Y) = \frac{d}{n}. \tag{8}$$

Доказательство. Прежде всего, среднее арифметическое Y имеет такое же математическое ожидание, как и X:
$$M\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\big(M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)\big) = \frac{1}{n}nm = m.$$
Далее, используя уже доказанные свойства дисперсии, получаем:
$$D(Y) = D\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\big(D(X_1 + X_2 + ... + X_n)\big) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\big(D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)\big) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n}. \blacksquare$$

Замечание. Из формулы (8) следует, что дисперсия среднего арифметического в n раз меньше исходной дисперсии отдельного слагаемого.

Иными словами, *среднее арифметическое имеет меньшее рассеивание вокруг математического ожидания* m. Это связано с тем, что в среднем арифметическом при суммировании отклонения разных знаков в значительной степени погашают друг друга.

Последнее находит применение в практике измерений. Так, например, в навигации принято производить измерения по приборам трижды и в качестве результата брать среднее арифметическое полученных значений.

1.9. Биномиальное распределение

Определение. Дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение* (распределена по *биномиальному закону*), если ее возможные значения

$$0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n-1, n$$

выражают число успехов k в n испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p, а соответствующие вероятности равны вероятностям числа успехов: $P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$. Таким образом, закон биномиального распределения имеет вид:

$$(\,0, 1, \ldots, n;\;\; P_n(0), P_n(1), \ldots, P_n(n)\,).$$

Для отыскания числовых характеристик биномиального распределения — математического ожидания и дисперсии — введем вспомогательные случайные величины: Z_k — *индикатор* k-го испытания $(k=1, 2, \ldots, n)$:

$Z_k=0$, если в k-м испытании имела место неудача;

$Z_k=1$, если в k-м испытании имел место успех.

Случайные величины Z_k независимы, поскольку связаны с исходами независимых испытаний, и имеют одинаковые законы распределения $(0, 1;\;\; p, q)$. Найдем их числовые характеристики:

$$M(Z_k)=q\cdot 0+p\cdot 1=p;$$

$$D(Z_k)=q(0-p)^2+p(1-p)^2=qp^2+pq^2=$$

$$=pq(p+q)=pq.$$

Исходная случайная величина (число успехов) X равна сумме индикаторов: $X=\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$ (в сумме справа столько единиц, сколько раз в n испытаниях имел место успех, а остальные слагаемые равны нулю).

По свойствам математического ожидания и дисперсии:

$$M(X)=M\left(\sum_{k=1}^{n}Z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}M(Z_k)=np;$$

$$D(X)=D\left(\sum_{k=1}^{n}Z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}D(Z_k)=npq.$$

Итак, *для случайной величины* X, *имеющей биномиальное распределение,*

$$\boxed{M(X)=np;\;\; D(X)=npq}.$$

1.10. Распределение Пуассона

Определение. Дискретная случайная величина X с бесконечным множеством значений распределена по *закону Пуассона с параметром* $\lambda>0$, если она принимает значения $k=0,1,2,\ldots,n,\ldots$ с вероятностями

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Распределение Пуассона имеют случайные величины, описывающие, например, работу АТС (пример системы массового обслуживания), катодную эмиссию электронов.

Найдем математическое ожидание и дисперсию распределения Пуассона, имея в виду, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}+\ldots=e^{\lambda}$$

-- ряд Маклорена для показательной функции.

1) $M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Первое слагаемое ряда равно нулю из-за множителя $k=0$; далее, при $k\geq 1$ после сокращения в каждом слагаемом ряда получаем: $\frac{k}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}$. Поэтому, вынося постоянный множитель $\lambda e^{-\lambda}$ за знак ряда, получаем:

$$M(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

2) Используем для вычисления дисперсии формулу (7) и уже известное значение математического ожидания.

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=M\left(X^2\right)-\lambda^2.$$

Случайная величина X^2 имеет закон распределения

$$\left(0^2,1^2,2^2,\ldots,k^2,\ldots;\ e^{-\lambda},\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!},\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!},\ldots,\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ldots\right).$$

Поэтому

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(1+\frac{2\lambda}{1!}+\frac{3\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{(k+1)\lambda^k}{k!}+\ldots\right).$$

Каждую дробь в скобках представляем в виде суммы двух слагаемых:

$$\frac{2\lambda}{1!}=\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda}{1!}=\frac{\lambda}{1!}+\lambda;\qquad \frac{3\lambda^2}{2!}=\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{2\lambda^2}{2!}=\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^2}{1!};\ \ldots;$$

$$\frac{(k+1)\lambda^k}{k!}=\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{k\lambda^k}{k!}=\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$ и т. д.

Группируя сначала все первые слагаемые, а затем из суммы вторых слагаемых вынося общий множитель λ, получаем:

$$M\left(X^2\right)=\lambda e^{-\lambda}\left[\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}+\ldots\right)\right]=\lambda e^{-\lambda}[e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}]=\lambda(1+\lambda).$$

Отсюда по формуле (7): $D(X)=(\lambda+\lambda^2)-\lambda^2=\lambda$.

Итак, *для случайной величины* X, *имеющей распределение Пуассона с параметром* λ: $\boxed{M(X)=\lambda;\ D(X)=\lambda}$.

ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Плотность непрерывной случайной величины

Напомним, что функция распределения $F(X)$ случайной величины X определяется формулой: $F(X) = P(X < x)$.

Определение. Случайная величина X называется *непрерывной*, если существует неотрицательная кусочно–непрерывная функция $p(x)$, интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ и такая, что функция распределения представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt}\,.$$

Функция $p(x)$ называется в этом случае *плотностью распределения* случайной величины.

Свойства плотности распределения.

1. *В точках непрерывности плотность является производной функции распределения*:

$$F'(X) = p(x). \tag{9}$$

В случае, когда плотность $p(x)$ непрерывна на всей числовой оси, это следует из теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом [12]. ■

Следствие. *В точках непрерывности плотности* $p(x)$ *функция распределения* $F(X)$ *дифференцируема (а значит, и непрерывна) и является первообразной для плотности.*

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1. \tag{10}$$

Доказательство. По определению несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} p(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} p(x)\,dx =$$

$$= \big(F(0) - F(-\infty)\big) + \big(F(+\infty) - F(0)\big) =$$

$$= \left(F(0) - 0\right) + \left(1 - F(0)\right) = 1. \quad \blacksquare$$

3. *Для непрерывной случайной величины* X *вероятность принять значение из полуоткрытого промежутка* $[a, b)$ *(«вероятность попадания в промежуток») равна интегралу от плотности по этому промежутку:*

$$P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)\,dx. \qquad (11)$$

Доказательство. По свойству функции распределения:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Замечание. Поскольку определенный интеграл в формуле (11) равен площади криволинейной трапеции для плотности $p(x)$, то при одинаковой длине промежутков больше вероятность попадания в тот из них, у которого больше площадь соответствующей криволинейной трапеции. Так, для плотности, график которой изображен на рис. 3, вероятность попадания в промежуток $[1, 2)$ больше, чем вероятность попадания в промежуток $[3, 4)$.

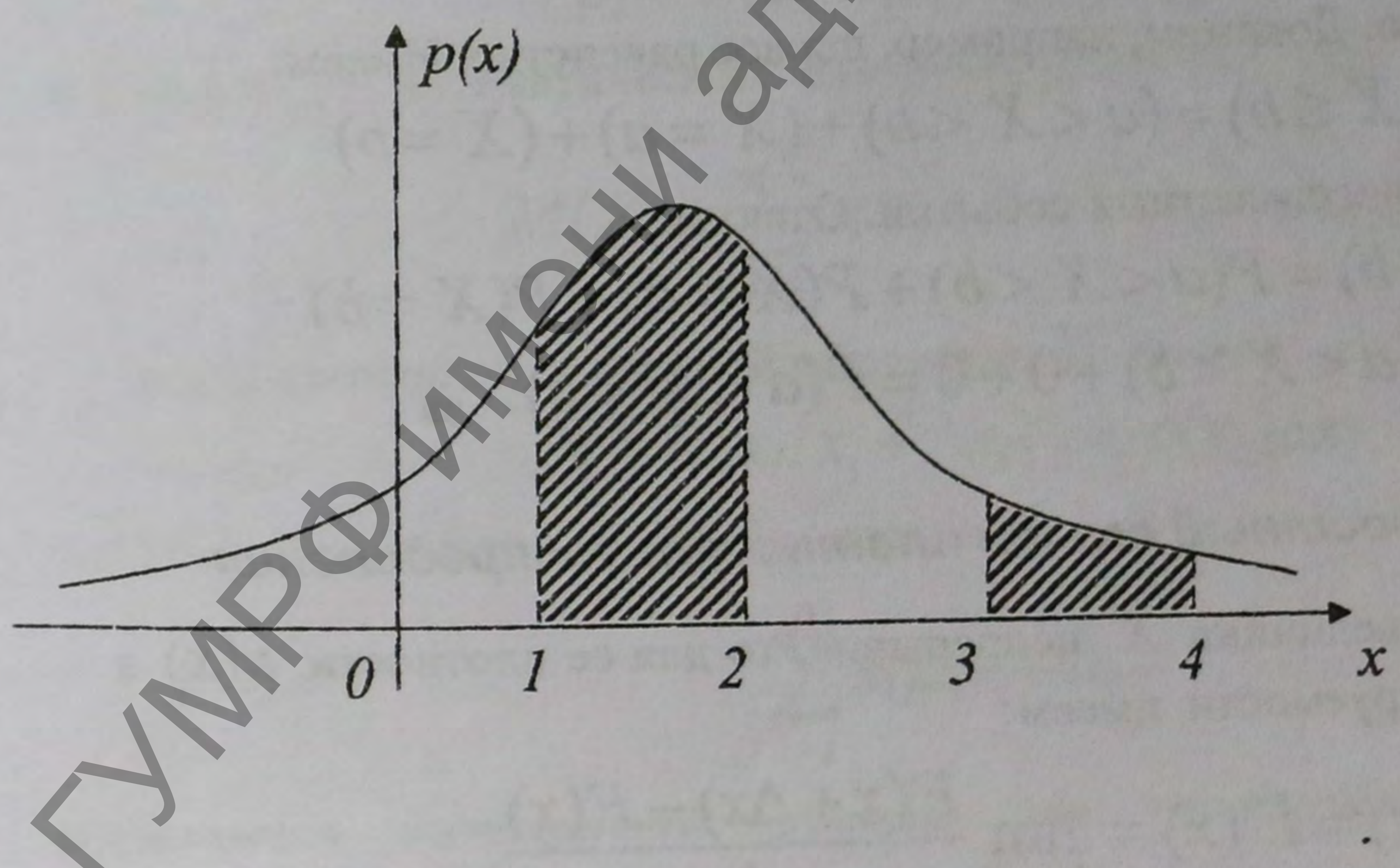

Рис.3.

2.2. Особенность *непрерывной случайной* величины

Теорема. *Для непрерывной случайной величины X вероятность принять любое наперед заданное значение равна нулю*:

$$\boxed{\forall a:\ P(X=a)=0}.$$

(Иными словами, «вероятность попадания в точку» равна нулю).

Замечание. Таким образом, непрерывные случайные величины дают примеры случайных событий, а именно $(X=a)$, которые, не будучи невозможными, имеют, тем не менее, вероятность, равную нулю.

Доказательство. Для любого $h>0$ событие $(X=a)$ влечет за собой событие $(a\le X<a+h)$, поэтому в силу непрерывности функции распределения:

$0\le P(X=a)\le P(a\le X<a+h)=F(a+h)-F(a)\underset{h\to+0}{\to}0$. Отсюда $P(X=a)=0$. ■

Следствие. *Для непрерывной случайной величины вероятность попадания в промежуток не зависит от вида промежутка*:

$$P(a<X<b)=P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)$$

(все эти вероятности равны $F(b)-F(a)$).

Доказательство. Докажем, например, первое равенство. Имеем:

$$(a\le X\le b)=(a<X<b)+(X=a)+(X=b)$$

— сумма попарно несовместных событий. Отсюда

$$P(a\le X\le b)=P(a<X<b)+P(X=a)+P(X=b)=$$
$$=P(a<X<b)+0+0=P(a<X<b).\ ■$$

2.3. Вероятностный смысл плотности распределения

Если случайная величина X непрерывна, то для ее плотности $p(x)$ в точках дифференцируемости имеем:

$$p(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Поэтому при малых $\Delta x>0$ имеет место приближенное равенство:

$$d(F(x))=p(x)\Delta x\approx F(x+\Delta x)-F(x)=P(X\in[x,x+\Delta x]).$$

Итак, *при малых $\Delta x>0$ вероятность того, что непрерывная случай-*

ная величина примет значение из отрезка $[x, x+\Delta x]$, приближенно равна произведению плотности в точке x на длину отрезка:

$$\boxed{P(X \in [x, x+\Delta x]) \approx p(x)\Delta x}.$$

2.4. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

I. Наводящее рассуждение.

Для дискретной случайной величины с законом распределения $(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n)$ математическое ожидание вычисляется, согласно п. 1.5, по формуле:

$$M(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \ .$$

Если отдельные значения x_i можно окружить непересекающимися малыми промежутками с длинами Δx_i, то вероятности p_i этих значений являются одновременно вероятностями попадания в соответствующие отрезки:

$$p_i = P(X \in [x_i, x_i + \Delta x_i]),$$

и формула для математического ожидания принимает вид:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X \in [x_i, x_i + \Delta x_i]). \tag{12}$$

Для непрерывной случайной величины X имеем

$$P(X \in [x_i, x_i + \Delta x_i]) \approx p(x_i)\Delta x_i ,$$

так что сумма, аналогичная (12), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i ,$$

и является интегральной суммой для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$.

II. Определение математического ожидания.

Определение: *Математическим ожиданием непрерывной случайной* *величины* X с плотностью $p(x)$ называется несобственный интеграл:

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx}, \tag{13}$$

причем предполагается, что этот интеграл сходится абсолютно, то есть, сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, p(x)\,dx$.

Если абсолютной сходимости нет, то для такой непрерывной случайной величины математическое ожидание не определено.

III. Математическое ожидание функции случайного аргумента.

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$, и $f(u)$ — функция числового аргумента, которая непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. Тогда $f(X)$ принимает вместе со случайным аргументом X случайные значения и является случайной величиной.

Можно доказать, что *случайная величина* $f(X)$ *также является непрерывной, и для ее математического ожидания справедлива формула*:

$$\boxed{M(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\,dx}. \tag{14}$$

IV. Свойства математического ожидания непрерывной случайной величины.

Эти свойства аналогичны свойствам математического ожидания в случае дискретной случайной величины (п. 1.6); перечислим их заново:

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*: $M(kX) = kM(X)$.

2. *Пусть случайные величины* X *и* Y *имеют математические ожидания* $M(X)$ *и* $M(Y)$. *Тогда*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

3. *Пусть случайные величины* X *и* Y <u>*независимы*</u> *и имеют математические ожидания* $M(X)$ и $M(Y)$. *Тогда*

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

2.5. Дисперсия непрерывной случайной величины

Напомним (п. 1.7), что дисперсия служит мерой рассеивания значений случайной величины вокруг математического ожидания и определяется как математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right).$$

Квадрат отклонения $(X-M(X))^2$ является частным случаем функции случайного аргумента X, а именно, когда

$$f(u)=(u-M(X))^2.$$

Поэтому, в соответствии с общей формулой (14), для дисперсии непрерывной случайной величины X с плотностью $p(x)$ получаем формулу:

$$\boxed{D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\,p(x)\,dx} \qquad (15)$$

Если несобственный интеграл в формуле (15) расходится, то считают, что дисперсия не существует.

Свойства дисперсии непрерывной случайной величины также аналогичны свойствам дисперсии в дискретном случае (п. 1.6); перечислим их заново:

1. $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx-(M(X))^2$.

2. $D(X)\geq 0$.

3. $D(kX)=k^2D(X)$.

4. *Если случайные величины* X *и* Y *__независимы__, то*

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

Для непрерывной случайной величины сохраняется определение среднего квадратического отклонения:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

2.6. Нормальное распределение

Определение: Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение (распределение Гаусса) с параметрами* a *и* $\sigma>0$, если ее плотность имеет вид:

$$\boxed{p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}. \quad (16)$$

График плотности нормального распределения, изображенный на рис. 4, называется *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*.

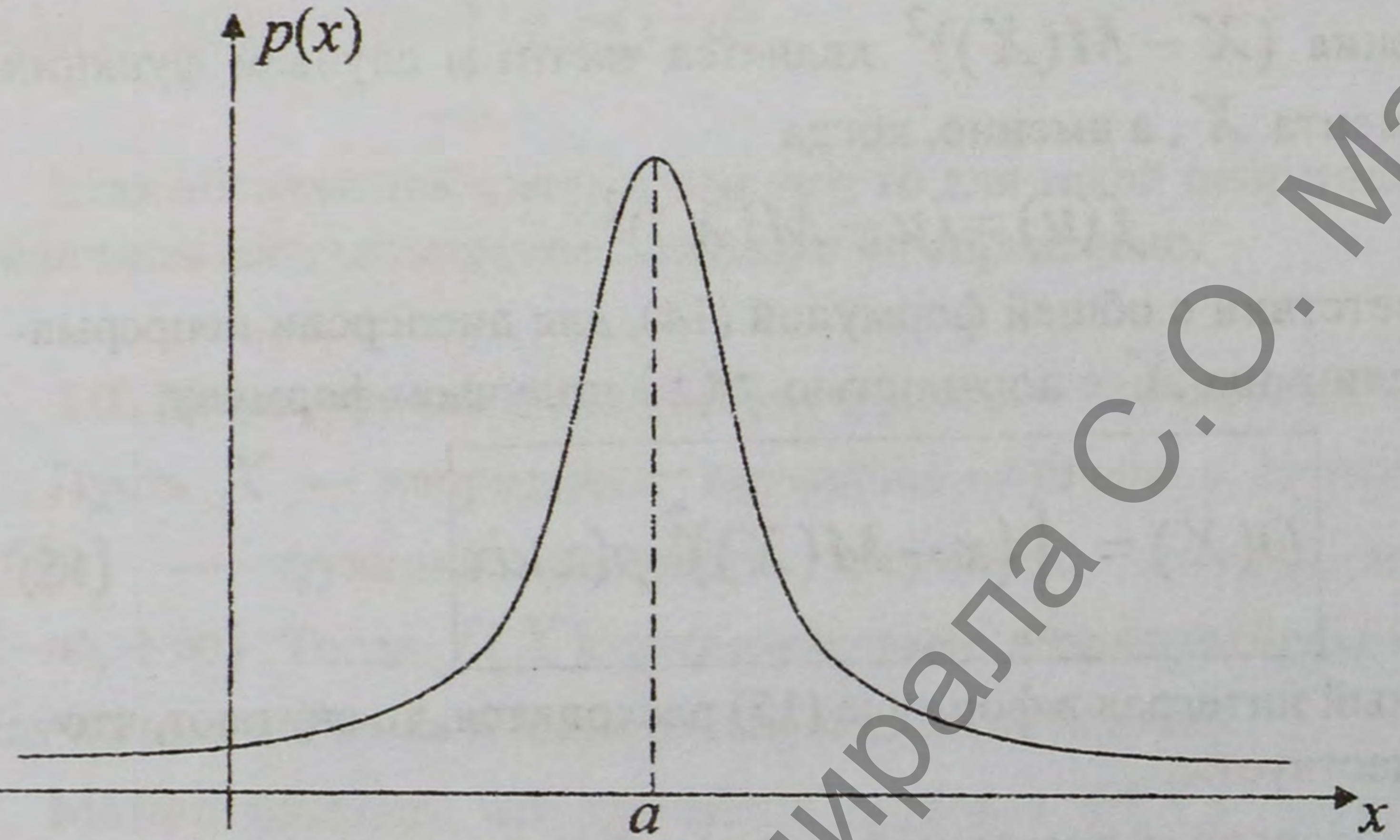

Рис. 4.

Из графика видно, что из интервалов значений одинаковой длины более близкие к a имеют большую вероятность, попадание в них происходит чаще. При удалении от a вероятность попадания в интервал уменьшается.

Такое поведение вероятностей, а значит, и относительных частот, характерно для многих случайных величин. Например, если a — средний рост, а X — рост произвольно выбранного человека, то люди, чей рост близок к среднему, встречаются часто, а «великаны» и «карлики» — крайне редко.

Замечание. При $a=0,\ \sigma=1$ плотность нормального распределения является дифференциальной функцией Лапласа [13]:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x).$$

Функция распределения F_N в этом случае задается выражением:

$$F_N(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt+\int_{0}^{x}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}+\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа. Итак,

$$\boxed{F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x)}\,.$$

Зависимость нормальной кривой от параметра a (при $a_1 < a_2$ и постоянном σ) изображена на рис. 5. Вертикальная прямая $x = a$ является осью симметрии нормальной кривой.

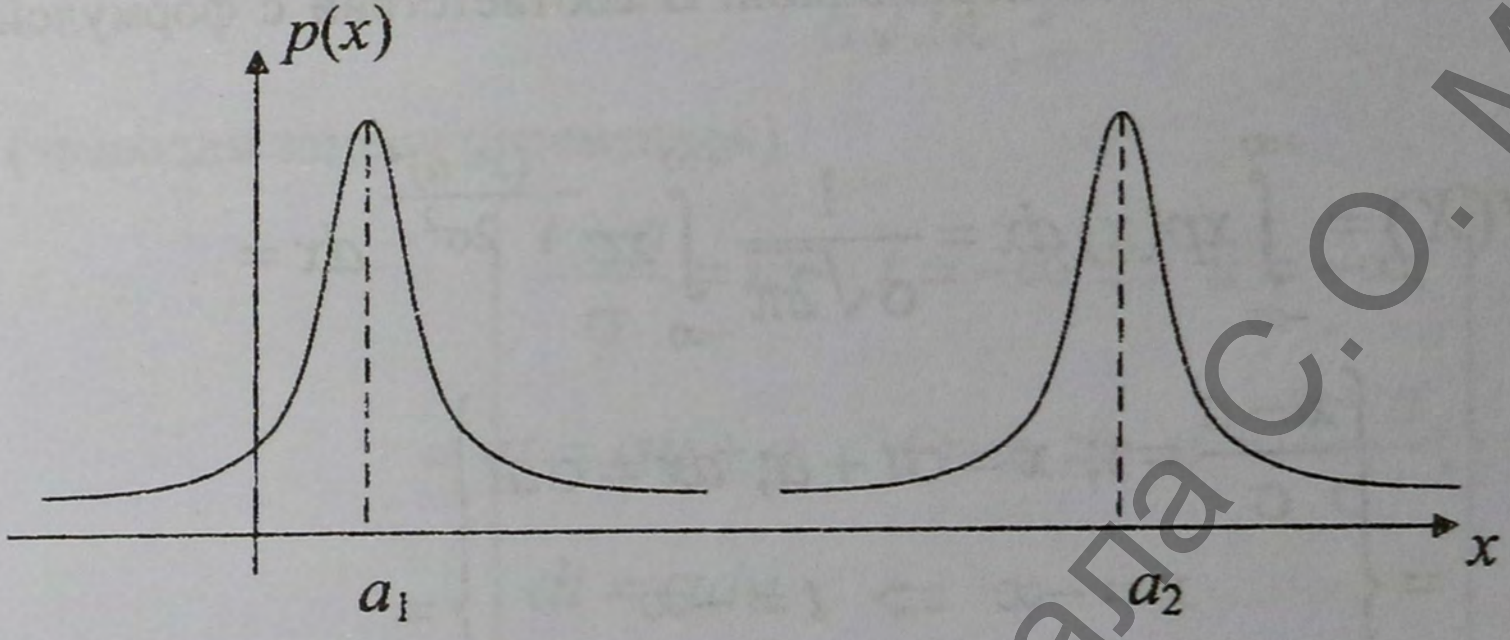

Рис. 5.

Зависимость нормальной кривой от параметра σ (при постоянном a) изображена на рис. 6. При увеличении σ кривая становится более пологой, так что далекие от a значения случайной величины X приобретают большую вероятность, реализуются чаще; разброс значений вокруг a при этом увеличивается.

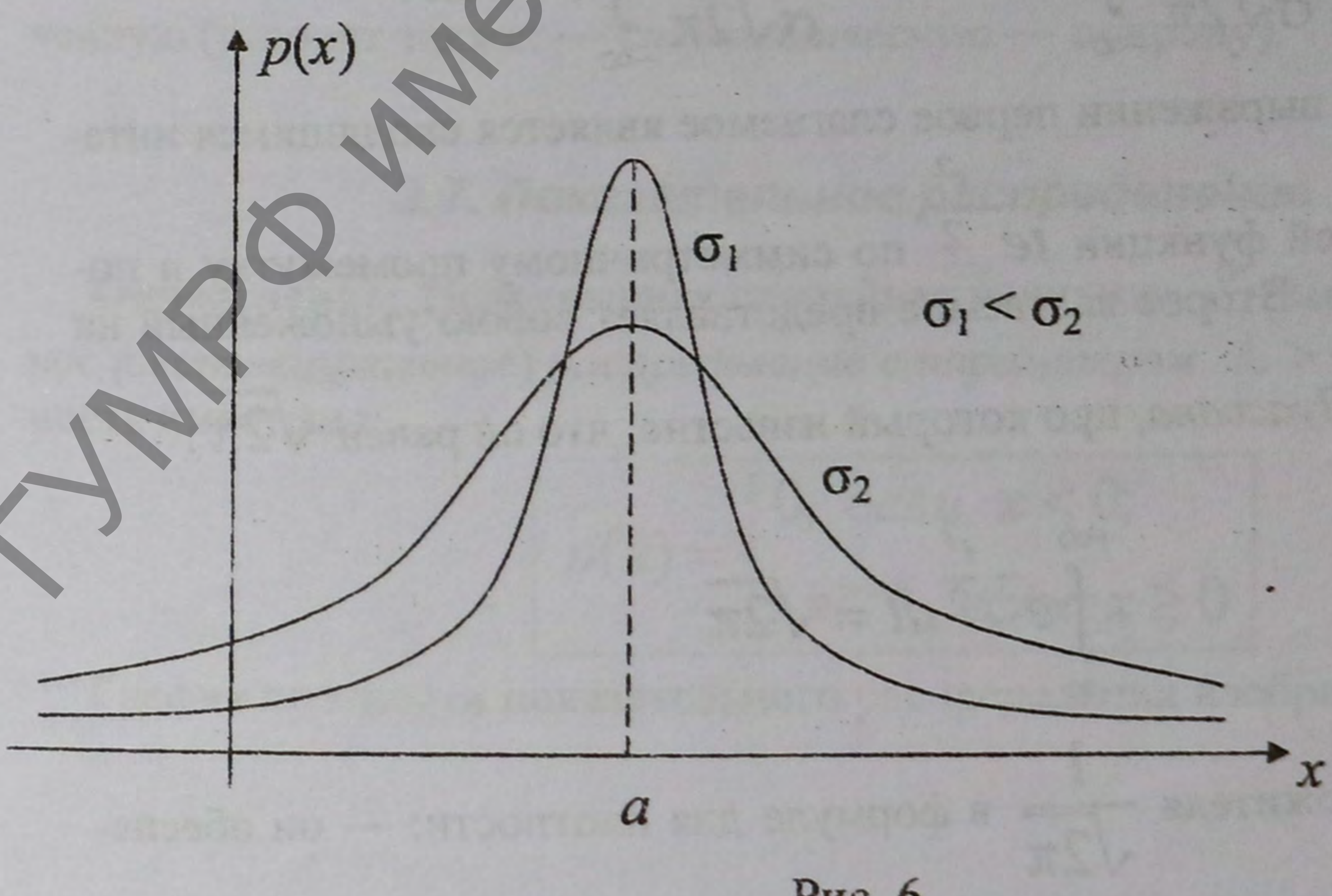

Рис. 6.

Эти свойства нормальной кривой проясняет

Теорема (о вероятностном смысле параметров a и σ). Для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ: $\boxed{M(X) = a; \quad D(X) = \sigma^2}$.

Доказательство. При вычислении интегралов, выражающих $M(X)$ и $D(X)$, воспользуемся заменой переменной. В соответствии с формулой (13):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x-a}{\sigma} = t; \; x = \sigma t + a; \; dx = \sigma dt \\ x = -\infty \;\Rightarrow\; t = -\infty \\ x = +\infty \;\Rightarrow\; t = +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\,dt =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{a\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

В полученном выражении первое слагаемое является сходящимся интегралом от нечетной функции $te^{-\frac{t^2}{2}}$ по симметричному промежутку и поэтому равно нулю. Второе слагаемое представляет собою умноженный на $\frac{a}{\sqrt{2\pi}}$ *интеграл Пуассона*, про который известно, что он равен $\sqrt{2\pi}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

(в этом смысл множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в формуле для плотности: — он обеспечивает выполнение равенства (10)). В результате получаем: $M(X) = a$.

Аналогичными вычислениями устанавливается и равенство $D(X) = \sigma^2$. ■

Получим выражение для функции распределения $F_{a,\sigma}(x)$ произвольного нормального закона с параметрами a и σ:

$$F_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

(проводим замену переменной)

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{t-a}{\sigma} = u; & t = -\infty \Rightarrow u = -\infty; \\ t = \sigma u + a & t = x \Rightarrow u = \dfrac{x-a}{\sigma}; \\ dt = \sigma du & \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Нормальное распределение играет исключительно важную роль при математическом описании многих процессов, имеющих вероятностную, случайную (говорят также: — *стохастическую* — природу).

2.7. Показательное распределение

Определение: Непрерывная случайная величина X имеет *показательное (экспоненциальное) распределение с параметром* $\lambda > 0$, если ее плотность имеет вид:

$$\boxed{p(x) = \begin{cases} 0, \ если \ \ x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ если \ \ x \geq 0 \end{cases}} . \qquad (17)$$

График плотности показательного распределения изображен на рис.7.

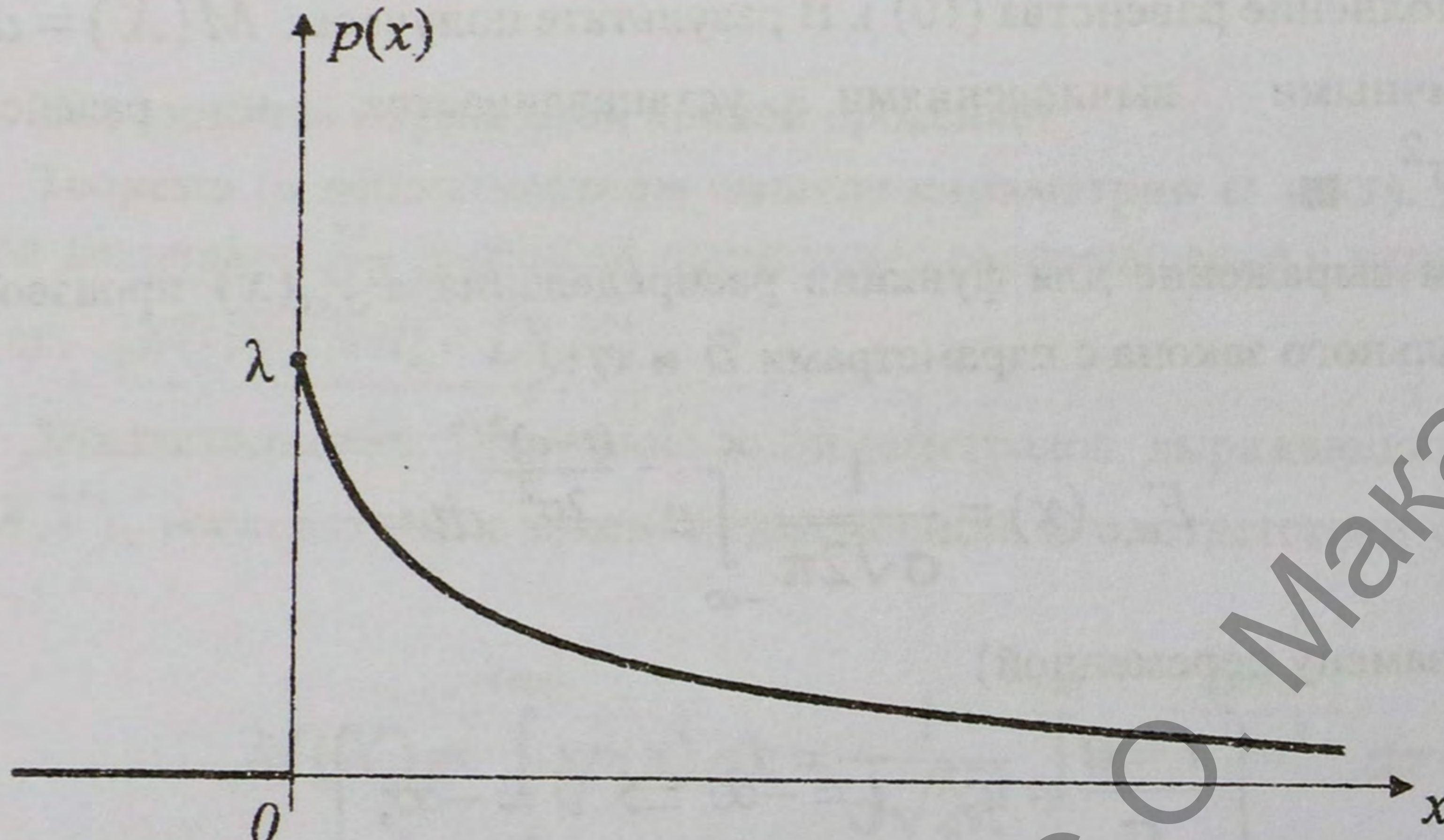

Рис. 7.

Теорема. Если непрерывная случайная величина имеет показательное распределение с параметром λ, то для ее математического ожидания и дисперсии справедливы формулы:

$$\boxed{M(X)=\frac{1}{\lambda};\ \ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}}.$$

Доказательство. Заметим, что по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{\lambda x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}=0.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=$$

$$0+\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}x\,dx=\left\{\begin{array}{l|l} u=x & du=dx \\ dv=\lambda e^{-\lambda x}dx & v=-e^{-\lambda x}\end{array}\right\}=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=-\left(\lim_{x\to+\infty}xe^{-\lambda x}-0\right)+\frac{1}{-\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=$$

$$-(0-0)+\frac{1}{-\lambda}\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\lambda x}-1\right)=\frac{1}{-\lambda}(0-1)=\frac{1}{\lambda}.$$

Далее,

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=M(X^2)-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Согласно формуле (14):

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)x^2\,dx=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}x^2dx.$$

Аналогично предыдущему, интегрируя по частям дважды, получим: $M(X^2)=\dfrac{2}{\lambda^2}$, так что $D(X)=\dfrac{2}{\lambda^2}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$. ■

Аналогичными вычислениями получается выражение для функции распределения показательного распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

2.8. Равномерное распределение

Определение: Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке* $[a,b]$, если ее плотность имеет вид:

$$\boxed{p(x)=\begin{cases}0, & если\ \ x\notin[a,b];\\ c, & если\ \ x\in[a,b].\end{cases}} \quad (18)$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 8.

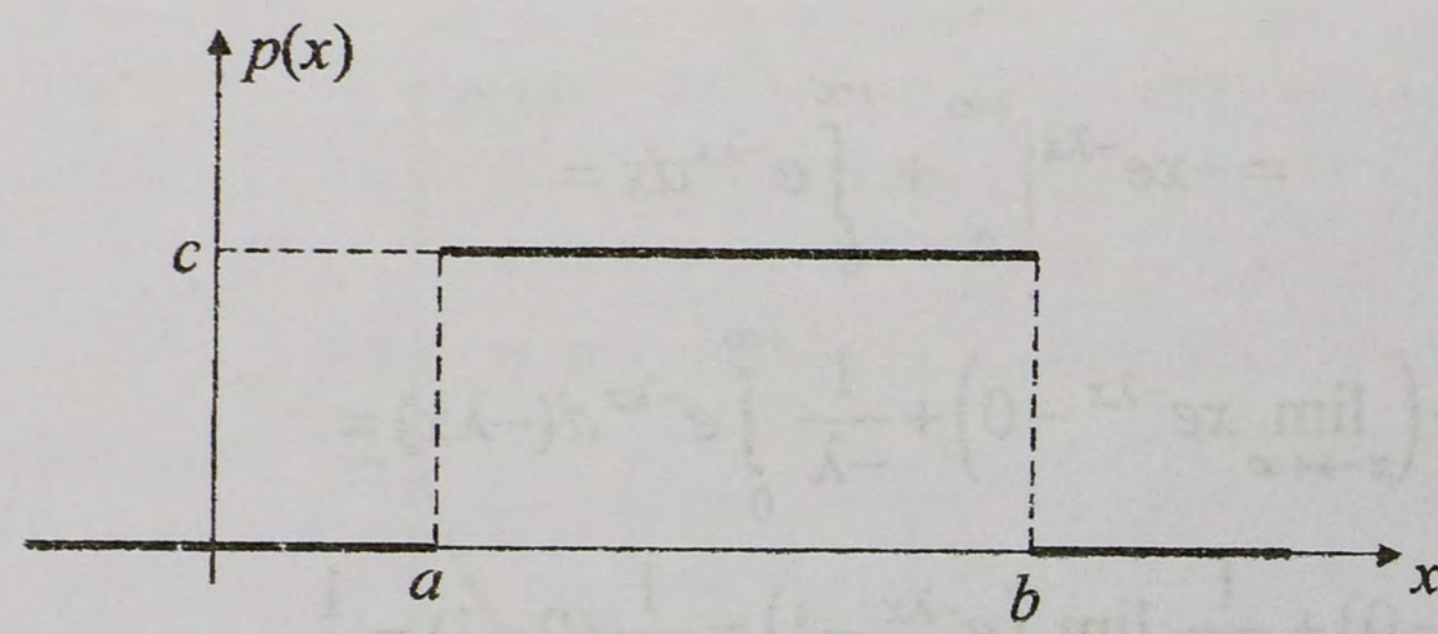

Рис.8.

Теорема. Если непрерывная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, то:

$$\boxed{c=\frac{1}{b-a}};\quad \boxed{M(X)=\frac{a+b}{2}};\quad \boxed{D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

Замечание. Число $\dfrac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a,b]$; число $(b-a)$ — длина отрезка $[a,b]$;

Доказательство. Для определения параметра c воспользуемся свойством плотности (10):

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a),\ \text{откуда}\ c=\frac{1}{b-a}.$$

Далее, $M(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)x\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=$$

$$=\frac{4(b^2+ab+a^2)-3(a^2+2ab+b^2)}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.\ \blacksquare$$

Замечание. Полученные значения математического ожидания и дисперсии равномерного распределения хорошо иллюстрируют их статистический смысл.

Так, в силу симметрии графика плотности относительно середины отрезка, при большом числе реализаций случайной величины одинаково часто будут встречаться значения случайной величины с обеих сторон от этой середины. Поэтому среднее арифметическое должно оказаться близким к ней.

Чем больше длина отрезка, то есть число $b-a$, тем на большем промежутке «размазаны» возможные значения, тем больше должна быть дисперсия, которая как раз и пропорциональна квадрату длины отрезка $[a,b]$.

Аналогичными вычислениями получается выражение для функции распределения равномерного распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}x-\dfrac{a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

2.9. Преобразование случайных величин

I. Линейное преобразование нормального закона.

Теорема. Если случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ, то при $k\neq 0$ случайная величина $Y=kX+b$, полученная из X линейным преобразованием вида $y=kx+b$, также имеет нормальное распределение с параметрами $a_1=ka+b$ и $\sigma_1=|k|\sigma$.

Доказательство. Рассмотрим случай $k>0$. Тогда функция $y=kx+b$ строго возрастает, и имеет место равносильность неравенств:

$$Y<x \Leftrightarrow kX+b<x \Leftrightarrow X<\frac{x-b}{k}.$$

Поэтому также имеет место равенство событий:

$$(Y<x)=\left(X<\frac{x-b}{k}\right).$$

Найдем функцию распределения $F_Y(x)$ случайной величины Y и убедимся, что она соответствует нормальному распределению.

$$F_Y(x)=P(Y<x)=P\left(X<\frac{x-b}{k}\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-b}{k}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&u=kt+b;\ t=\frac{u-b}{k};\ dt=\frac{du}{k}\\&t=-\infty\ \Rightarrow\ u=-\infty\\&t=\frac{x-b}{k}\ \Rightarrow\ u=x\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(k\sigma)\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{u-b}{k}-a\right)^2}du=$$

$$=\frac{1}{(k\sigma)\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-(ka+b))^2}{2(k\sigma)^2}}\,du=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,du.$$

Пришли к функции распределения нормального закона с параметрами $a_1=ka+b$ и $\sigma_1=|k|\sigma$. Аналогично рассматривается и случай $k<0$.

■

II. Общий случай преобразования случайной величины.

Пусть теперь $y=f(x)$ – не линейная, а произвольная непрерывная <u>строго монотонная</u> функция. Аналогичными выкладками можно при заданных функции распределения $F_X(x)$ и плотности $p_X(x)$ случайной величины X найти функцию распределения $F_Y(x)$ и плотность $p_Y(x)$ случайной величины $Y=f(X)$. Дело сводится к замене переменной в соответствующем интеграле.

Пример. Пусть $Y=X^3$, то есть $f(x)=x^3$. Из равносильности неравенств: $Y<x\Leftrightarrow X<\sqrt[3]{x}$ вытекает равенство событий: $(Y<x)=\left(X<\sqrt[3]{x}\right)$. Поэтому

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X < \sqrt[3]{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\sqrt[3]{x}} p_X(t)\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{u};\;\; u = t^3;\;\; dt = \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \\ t = -\infty \Rightarrow u = -\infty \\ t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow u = x \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} p_X(\sqrt[3]{u})\,du.$$

Подынтегральная функция в последнем выражении является плотностью распределения случайной величины Y: $p_Y(x) = \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} p_X(\sqrt[3]{u})$.

2.10. Вероятность попадания в промежуток для нормального распределения.

I. Вероятность попадания в произвольный промежуток.

Теорема. Пусть непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ. Тогда для всякого промежутка $\langle A, B\rangle$ вероятность попадания значения X в этот промежуток задается формулой:

$$\boxed{P(X \in \langle A, B\rangle) = \Phi\left(\frac{B-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-a}{\sigma}\right)}. \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку для непрерывной случайной величины вероятность попадания в промежуток не зависит от типа промежутка (п. 2.2), докажем формулу (19) для интервала (A, B). Введем случайную величину

$$Y = \frac{X-a}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X + \left(-\frac{a}{\sigma}\right).$$

Она получена из X линейным преобразованием. По предыдущей теореме

Y имеет нормальное распределение с параметрами $a_1 = \frac{1}{\sigma}a + \left(-\frac{a}{\sigma}\right) = 0$ и $\sigma_1 = \left|-\frac{1}{\sigma}\right|\sigma = 1$. Ее плотностью является дифференциальная функция Лапласа $\varphi(x)$, одной из первообразных которой является интегральная функция Лапласа $\Phi(x)$.

Ввиду равносильности неравенств

$$A < X < B \Leftrightarrow \frac{A-a}{\sigma} < \frac{X-a}{\sigma} < \frac{B-a}{\sigma} \Leftrightarrow \frac{A-a}{\sigma} < Y < \frac{B-a}{\sigma},$$

получаем для вероятностей:

$$P(A < X < B) = P\left(\frac{A-a}{\sigma} < Y < \frac{B-a}{\sigma}\right) = \int\limits_{\frac{A-a}{\sigma}}^{\frac{B-a}{\sigma}} \varphi(x)\,dx.$$

Применяя к последнему интегралу формулу Ньютона-Лейбница с первообразной Φ, получаем окончательно:

$$P(A < X < B) = \Phi\left(\frac{B-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-a}{\sigma}\right). \blacksquare$$

Пример. Пусть X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найдем вероятность попадания в отрезок $[10, 40]$.

Здесь $A = 10,\ B = 40,\ \frac{A-a}{\sigma} = -2,\ \frac{B-a}{\sigma} = 1$. Учитывая нечетность функции Φ, получаем:

$$P(X \in [10, 40]) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) \approx$$
$$\approx 0.3413 + 0.4772 = 0.8185.$$

В соответствии с эмпирическим законом больших чисел, следует ожидать, что при большом числе испытаний относительная частота попадания реализованного значения случайной величины в отрезок $[10, 40]$ окажется близкой к 82%.

II. Вероятность отклонения от математического ожидания.

Теорема. Пусть непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ. Тогда для всякого $\delta > 0$ вероятность отклонения значения X от математического ожидания a по модулю меньше чем на δ, задается формулой:

$$\boxed{P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)}. \qquad (20)$$

Доказательство. Применим формулу (19) при

$A=a-\delta,\ B=a+\delta$, так что $\dfrac{B-a}{\sigma}=\dfrac{\delta}{\sigma},\quad \dfrac{A-a}{\sigma}=-\dfrac{\delta}{\sigma}$. Поскольку функция Φ является нечетной, то

$$P(|X-a|<\delta)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \ \blacksquare$$

Пример. Пусть X имеет нормальное распределение, и $\sigma = 2$. Найдем при $\delta = 1.2$ вероятность отклонения от математического ожидания:

$$P(|X-a|<1.2)=2\Phi\left(\frac{1.2}{2}\right)=2\Phi(0.6)\approx 2\cdot 0.2257=0.4514.$$

III. Правило «трех сигм».

Применим последнюю теорему и формулу (20) к отклонению $\delta = 3\sigma$. При этом

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 2\cdot 0.49865=0.9973.$$

Итак, для нормально распределенной случайной величины с параметрами a и σ вероятность отклонения реализованного значения от математического ожидания менее чем на 3σ, приближенно равна 0.9973. Во многих практических ситуациях случайное событие с такой вероятностью принято считать *практически достоверным*.

Поэтому полагают, что *практически все реализуемые значения нормально распределенной случайной величины с параметрами* a *и* σ *попадают в интервал* $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. В этом и заключается «правило трех сигм».

2.11. Корреляция случайных величин

1. Нормированные случайные величины.

Определение. Случайная величина X называется *центрированной*, если она имеет математическое ожидание, равное нулю: $M(X)=0$.

Пример. Случайная величина X, распределенная по нормальному закону с параметрами $a=0$ и σ, является центрированной, поскольку $M(X)=a=0$.

Напомним, что для случайной величины X, имеющей математическое ожидание $M(X)=m$, случайная величина $\overset{\circ}{X}=X-m$ называется *отклонением* (отклонением X от математического ожидания).

Теорема. Отклонение $\overset{\circ}{X}$ является центрированной случайной величиной.

Доказательство. По свойствам математического ожидания:

$$M(\overset{\circ}{X})=M(X-m)=M(X)-M(m)=m-m=0. \blacksquare$$

Определение. Случайная величина X называется *нормированной*, если она имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице: $M(X)=0,\ \ D(X)=1$.

Теорема. Для случайной величины X, у которой $M(X)=m$, $D(X)=\sigma^2>0$ (так что $\sigma=\sigma(X)$ — среднеквадратическое отклонение), случайная величина

$$X'=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{\overset{\circ}{X}}{\sigma} \qquad (21)$$

является нормированной.

Доказательство. По свойствам математического ожидания и дисперсии:

$$M(X')=\frac{1}{\sigma}M(\overset{\circ}{X})=\frac{1}{\sigma}\cdot 0=0;$$

$$D(X')=\frac{1}{\sigma^2}\big(D(X)+D(-m)\big)=\frac{1}{\sigma^2}\big(\sigma^2+0\big)=1. \blacksquare$$

Теорема. Для нормированной случайной величины X' справедлива формула:

$$D(X')=M(X'^2). \qquad (22)$$

Доказательство. По формуле разности математических ожиданий (7):

$$D(X') = M(X'^2) - \left(M(X')\right)^2 = M(X'^2) - 0^2 = M(X'^2). \blacksquare$$

2. Корреляционный момент.

Определение. Пусть случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$. Их корреляционным моментом μ_{XY} называется математическое ожидание произведения отклонений:

$$\boxed{\mu_{XY} = M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = M\left((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right)}.$$

Определение. 1. Случайные величины X и Y называются *коррелированными*, если их корреляционный момент не равен нулю: $\mu_{XY} \neq 0$.

2. Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент равен нулю: $\mu_{XY} = 0$.

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы, то их корреляционный момент равен нулю: $\mu_{XY} = 0$.

Доказательство. По свойствам математического ожидания:

$$\mu_{XY} = M\left((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right) =$$

$$= M\left(XY - M(X)Y - M(Y)X + M(X)M(Y)\right) =$$

$$= M(XY) - M(X)M(Y) - M(X)M(Y) + M(X)M(Y) =$$

$$= M(XY) - M(X)M(Y) = 0$$

(последнее равенство имеет место по теореме умножения для математических ожиданий независимых случайных величин). $\blacksquare$

Следствие. Если случайные величины X и Y являются коррелированными, то они зависимы.

3. Коэффициент корреляции.

Определение. *Коэффициентом корреляции* случайных величин X и Y, имеющих корреляционный момент μ_{XY} и средние квадратические отклонения $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$, называется число

$$\boxed{r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}.$$

В то время как корреляционный момент μ_{XY} является размерной величиной, значение которой зависит от выбора единиц измерения X и Y, коэффициент корреляции r_{XY} является безразмерной величиной.

Теорема (об оценке коэффициента корреляции). Справедливо неравенство:

$$\boxed{|r_{XY}| \le 1}.$$

Доказательство. Пусть X' и Y' – соответствующие нормированные случайные величины, полученные по формуле (21). Тогда, внося постоянные множители под знак математического ожидания, имеем:

$$r_{XY} = \frac{M(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y})}{\sigma_X \sigma_Y} = M\left(\frac{\overset{\circ}{X}}{\sigma_X}\frac{\overset{\circ}{Y}}{\sigma_Y}\right) = M(X'Y'). \quad (23)$$

Применим к дисперсии формулу разности математических ожиданий (7):

$$0 \le D(X' \pm Y') = M\left((X' \pm Y')^2\right) - \left(M(X' \pm Y')\right)^2 =$$

$$= \left[M(X'^2) \pm 2M(X'Y') + M(Y'^2)\right] - (0 \pm 0)^2 =$$

(применим формулу (22) к первому и третьему слагаемым, формулу (23) — ко второму)

$$= D(X') \pm 2r_{XY} + D(Y') = 1 \pm 2r_{XY} + 1 = 2 \pm 2r_{XY}.$$

Итак, $0 \le 2 \pm 2r_{XY} \Rightarrow |r_{XY}| \le 1$. ■

Замечание. В ходе доказательства для нормированных случайных величин установлено равенство:

$$D(X' \pm Y') = 2(1 \pm r_{XY}). \quad (24)$$

Теорема (необходимое условие независимости). Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{XY} = 0$.

Доказательство. Поскольку X и Y независимы, то

$$\mu_{XY} = 0 \Rightarrow r_{XY} = 0. \ ■$$

Теорема (критерий линейной связи). Для того чтобы случайные величины X и Y были связаны функциональной линейной зависимостью вида $Y = kX + b \ (k \ne 0)$, необходимо и достаточно выполнение условия $|r_{XY}| = 1$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $Y = kX + b$; по свойствам математического ожидания и дисперсии:

$$M(Y) = kM(X) + b;$$

$$D(Y) = D(kX + b) = k^2 D(X) + 0 = k^2 D(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_Y = \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{k^2 D(X)} = |k| \sigma_X.$$

Теперь

$$r_{XY} = \frac{M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y)))}{\sigma_X \sigma_Y} =$$

$$= \frac{M((X - M(X))(kX + b - kM(X) - b))}{\sigma_X |k| \sigma_X} =$$

$$= \frac{kM((X - M(X))(X - M(X)))}{\sigma_X |k| \sigma_X} = \frac{kD(X)}{\sigma_X |k| \sigma_X} = \frac{k}{|k|} = \pm 1.$$

2. Достаточность. Пусть $|r_{XY}| = 1$, то есть $r_{XY} = \pm 1$. Если, например, $r_{XY} = 1$, то с учетом (24):

$$0 \le D(X' - Y') = 2(1 - r_{XY}) = 2(1 - 1) = 0,$$

так что $D(X' - Y') = 0$. Тогда, по свойству дисперсии $X' - Y' = a = const$, то есть

$$\frac{X - M(X)}{\sigma_X} - \frac{Y - M(Y)}{\sigma_Y} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + \left(M(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} M(X) - \sigma_Y a \right).$$

Остается положить

$$k = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}; \; b = \left(M(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} M(X) - \sigma_Y a \right). \; \blacksquare$$

ГЛАВА 3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

3.1. Первое неравенство Чебышева

Теорема. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и принимает только неотрицательные значения, то

$$P(X \geq 1) \leq M(X). \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда, поскольку при $x \in (1, +\infty)$ выполняется неравенство $p(x) \leq xp(x)$:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} p(x)\,dx \leq \int_1^{+\infty} xp(x)\,dx \leq$$

(добавляем неотрицательное слагаемое — интеграл по отрезку $[0,1]$ от неотрицательной функции $xp(x)$)

$$\leq \int_1^{+\infty} xp(x)\,dx + \int_0^1 xp(x)\,dx =$$

(добавляем нулевое слагаемое — интеграл по промежутку $(-\infty, 0]$, на котором $p(x) = 0$ в силу условия на X)

$$= \int_1^{+\infty} xp(x)\,dx + \int_0^1 xp(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 xp(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = M(X). \blacksquare$$

3.2. Второе неравенство Чебышева

Теорема. Если случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X) = m$ и дисперсию $D(X) = d$, то для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\boxed{P(|X - m| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{d}{\varepsilon^2}}. \tag{26}$$

Замечание. В левой части неравенства (26) стоит вероятность того, что реализованное значение случайной величины X отклонится от математического ожидания меньше чем на ε.

Доказательство. Имеет место равносильность неравенств:

$$|X-m|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|X-m|}{\varepsilon}<1 \Leftrightarrow \frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}<1.$$

Поэтому $P(|X-m|<\varepsilon)=P\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}<1\right)$. Поскольку события $\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}<1\right)$ и $\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}\geq 1\right)$ противоположны, то

$$P(|X-m|<\varepsilon)=1-P\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}\geq 1\right).$$

Применим первое неравенство Чебышева к неотрицательной случайной величине $\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}\geq 1\right)\leq M\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}\right)=\frac{1}{\varepsilon^2}M((X-m)^2)=\frac{d}{\varepsilon^2}$$

(последнее равенство – в силу определения дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения). Теперь

$$P(|X-m|<\varepsilon)=1-P\left(\frac{(X-m)^2}{\varepsilon^2}\geq 1\right)\geq 1-\frac{d}{\varepsilon^2}. \blacksquare$$

3.3. Сходимость по вероятности

Определение. Число a называется *пределом по вероятности* последовательности случайных величин X_n, если для любого $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-a|<\varepsilon)=1. \qquad (27)$$

Говорят также, что X_n *сходится по вероятности к числу* a.

Обозначение: $X_n \xrightarrow{(P)} a$.

Замечания. 1. Равенство (27) означает, что с увеличением номера n вероятность события $(|X_n-a|<\varepsilon)$ неограниченно приближается к единице, и, значит, событие становится все более достоверным, происходит все чаще.

2. Ввиду равносильности неравенств

$$\left|X_n - a\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|(X_n - a) - 0\right| < \varepsilon,$$

имеет место равносильность двух условий сходимости по вероятности:

$$X_n \overset{(P)}{\to} a \Leftrightarrow (X_n - a) \overset{(P)}{\to} 0.$$

3.4. Общий закон больших чисел в форме Чебышева.

Термином «закон больших чисел» объединяют круг теорем, утверждающих, что с вероятностью близкой к единице произойдет некоторое случайное событие A, зависящее от неограниченно увеличивающегося числа других случайных событий, каждое из которых оказывает лишь незначительное влияние на A.

Теорема. Пусть последовательность случайных величин X_n удовлетворяет трем условиям:

1. Случайные величины X_n независимы (см. п. 3.6).

2.Они имеют математические ожидания $M(X_n)$ и дисперсии $D(X_n)$.

3. Дисперсии ограничены в совокупности, то есть при всех n: $D(X_n) \le C = const$.

Тогда

$$\boxed{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} \overset{(P)}{\to} 0} \quad (28)$$

Замечание. Левая часть формулы (28) есть разность между средним арифметическим первых n случайных величин и средним арифметическим их математических ожиданий. Таким образом, теорема означает, что с увеличением числа слагаемых n среднее арифметическое реализованных значений практически всегда оказывается близким к среднему арифметическому математических ожиданий.

Доказательство. Положим $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$. По свойствам математического ожидания:

$$M(Y_n) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) =$$

$$=\frac{1}{n}\big(M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)\big).$$

Поэтому равенство (28), которое нужно доказать, принимает вид:

$$Y_n - M(Y_n)\xrightarrow{(P)}0.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Применим к Y_n второе неравенство Чебышева:

$$1\ge P\big(|Y_n-M(Y_n)|<\varepsilon\big)\ge 1-\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}. \qquad (*)$$

По свойствам дисперсии:

$$0\le D(Y_n)=D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(Y_i)\le$$

(пользуемся условием $D(Y_i)\le C$)

$\le\dfrac{nC}{n^2}=\dfrac{C}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$. Тогда по принципу сжатой переменной, примененному к последовательности $D(Y_n)$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}D(Y_n)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}\right)=1.$$

Теперь, применяя тот же принцип сжатой переменной к последовательности $P\big(|Y_n-M(Y_n)|<\varepsilon\big)$, получаем из двойного неравенства (*), что

$$\lim_{n\to\infty}P\big(|Y_n-M(Y_n)|<\varepsilon\big)=1. \quad \blacksquare$$

3.5. Частный закон больших чисел в форме Чебышева.

Теорема. Пусть случайные величины X_n независимы, и имеют одинаковые математические ожидания $M(X_n)=m$ и одинаковые дисперсии $D(X_n)=d$. Тогда имеет место сходимость по вероятности:

$$\boxed{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\xrightarrow{(P)}m}. \qquad (29)$$

Замечание. Условия теоремы выполняются, в частности, если независимые случайные величины имеют одинаковое распределение (одинаковую функцию распределения), и у них существуют математическое ожидание и дисперсия.

Доказательство. Выполняются все условия предыдущей теоремы; при этом

$$\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}=\frac{nm}{n}=m.$$

Согласно общему закону больших чисел, имеем:

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-m\xrightarrow{(P)}0\Rightarrow\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\xrightarrow{(P)}m. \blacksquare$$

Замечание. Формулы (28) и (29) являются математическим выражением давно установленного эмпирически факта устойчивости среднего арифметического большого числа независимых случайных величин, — устойчивости, при которой существенные отклонения среднего арифметического реализованных значений от общего математического ожидания отдельных слагаемых являются редкими событиями. Это существенно дополняет свойство дисперсии среднего арифметического (п. 1.8).

Причиной такой устойчивости, как уже отмечалось в п. 1.8, является взаимное погашение отклонений разных знаков отдельных слагаемых при их суммировании в среднем арифметическом.

3.6. Закон больших чисел в форме Я.Бернулли.

Теорема. Пусть случайная величина $X_n=w(A)=\dfrac{k(A)}{n}$ — относительная частота события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха $P(A)=p$. Тогда имеет место сходимость по вероятности

$$\boxed{w(A)\xrightarrow{(P)}p}. \qquad (30)$$

Замечание. Закон больших чисел в форме Бернулли является математическим выражением эмпирического закона больших чисел, в соответствии с которым при большом числе испытаний относительная частота $w(A)$ колеблется вблизи теоретической вероятности p (см. [13], п. 3.5).

Доказательство. Введем вспомогательные случайные величины Z_k — индикатор k-го испытания (см. п. 1.9):

$Z_k=0$, если в k-м испытании имела место неудача;

$Z_k=1$, если в k-м испытании имел место успех.

Случайные величины Z_k независимы, поскольку связаны с исходами независимых испытаний, Они имеют одинаковый закон распределения $(0,1;\ \ p,q)$, одинаковые математические ожидания и одинаковые дисперсии: $M(Z_k) = p$, $D(Z_k) = pq$.

Случайная величина $k(A)$ (число успехов) есть сумма индикаторов: $k(A) = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ (в сумме справа столько единиц, сколько раз в n испытаниях имел место успех, а остальные слагаемые равны нулю). Относительная частота $w(A)$ есть среднее арифметическое индикаторов:

$$w(A) = \frac{k(A)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k}{n}.$$

Согласно частному закону больших чисел в форме Чебышева

$$w(A) \xrightarrow{P} p. \ \blacksquare$$

3.7. Центральная предельная теорема.

Эмпирически замечен факт: результат совместного влияния большого числа независимых случайных величин, каждая из которых в отдельности влияет на общую сумму лишь незначительно, приводит к нормальному распределению.

Термином «центральная предельная теорема» (ЦПТ) объединяют круг теорем, которые в различных формах описывают математически это стремление к нормальному закону. Приведем формулировку одной из теорем круга ЦПТ.

Теорема (ЦПТ в форме Леви). Пусть последовательность случайных величин X_n удовлетворяет трем условиям:

1. Все X_n независимы.

2. Все X_n имеют одинаковую функцию распределения; при всех n выполняется равенство $F_{X_n}(x) = F(x)$.

3. Все X_n имеют математические ожидания и дисперсии: $M(X_n) = m$, $D(X_n) = \sigma^2$ (эти характеристики одинаковы для всех случайных величин в силу второго условия).

Тогда для функций распределения F_{Y_n} случайных величин $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ при каждом x выполняется равенство:

$\lim\limits_{n\to\infty} F_{Y_n}(x) = F_N(x)$, где $F_N(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ (см. п. 2.7).

Замечание. По свойствам математического ожидания и дисперсии случайные величины Y_n имеют те же характеристики, что и предельное распределение $F_N(x)$: $M(Y_n) = 0$; $D(Y_n) = 1$.

ГЛАВА 4. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Функция распределения двумерной случайной величины

Определение. *Двумерной случайной величиной (случайным вектором, системой двух случайных величин)* Z называется упорядоченная пара случайных величин X и Y: $Z=(X,Y)$. При этом случайные величины X и Y называются *составляющими* Z.

Аналогично определяется n-мерный случайный вектор:
$Z=(X_1,X_2,...,X_n)$.

Геометрически двумерная случайная величина Z изображается случайной точкой плоскости со случайными координатами X и Y (рис. 9)

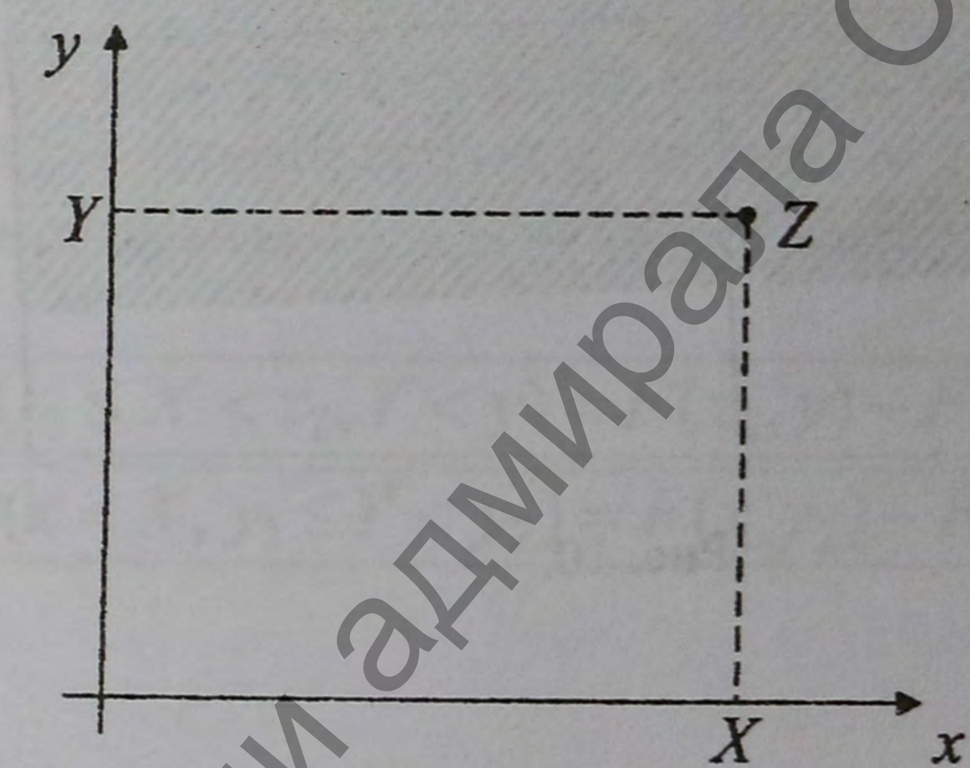

Рис. 9.

Определение. *Функцией распределения* двумерной случайной величины $Z=(X,Y)$ называется функция двух переменных $F(x,y)$, задаваемая формулой:

$$\boxed{F(x,y)=P(X<x,Y<y)}.$$

$F(x,y)$ выражает вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D плоскости Oxy (рис. 10).

Свойства функции распределения

1. Для любых x и y выполняется неравенство:

$$\boxed{0\le F(x,y)\le 1}.$$

Это следует из общих свойств вероятности случайного события ([13], п. 3.2).

2. Функция $F(x,y)$ является неубывающей по каждому аргументу:

при $x_1 < x_2$: $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$;

при $y_1 < y_2$: $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$.

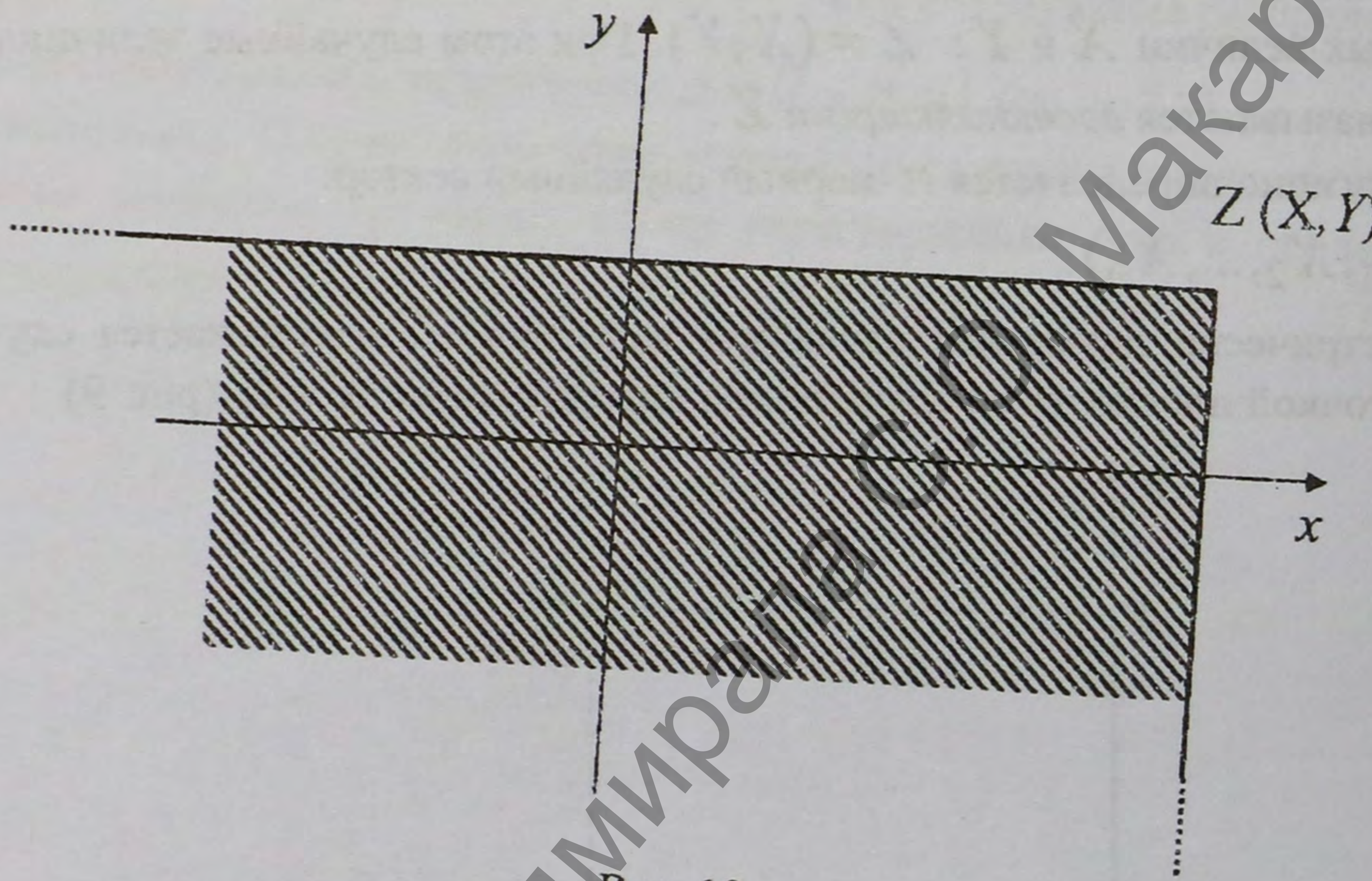

Рис. 10.

Доказательство. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Тогда

$$(X < x_2, Y < y) = (X < x_1, Y < y) + (x_1 \le X < x_2, Y < y)$$

– сумма несовместных событий. Следовательно

$$P(X < x_2, Y < y) = \\ = P(X < x_1, Y < y) + P(x_1 \le X < x_2, Y < y), \tag{31}$$

откуда $P(X < x_2, Y < y) \ge P(X < x_1, Y < y)$, так как последнее слагаемое в (31), будучи вероятностью случайного события, неотрицательно. ■

3. Поведение функции распределения на бесконечности:

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0;$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0;$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{x,y\to-\infty}F(x,y)=0;$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{x,y\to+\infty}F(x,y)=1.$$

(без доказательства).

4. Если $F(x,y)$ – функция распределения двумерной случайной величины (X,Y), а $F_X(x)$, $F_y(y)$ — функции распределения составляющих X и Y, то

$$F(+\infty,y)=F_Y(y),\quad F(x,+\infty)=F_X(x).$$

(без доказательства).

Определение. Функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ составляющих двумерной случайной величины называются *частными распределениями*.

5. Вероятность попадания случайной точки в полосу (рис. 11):

$$\boxed{P(x_1\le X<x_2, Y<y)=F(x_2,y)-F(x_1,y)};\qquad(32)$$

$$\boxed{P(x<X, y_1\le Y<y_2)=F(x,y_2)-F(x,y_1)}.\qquad(33)$$

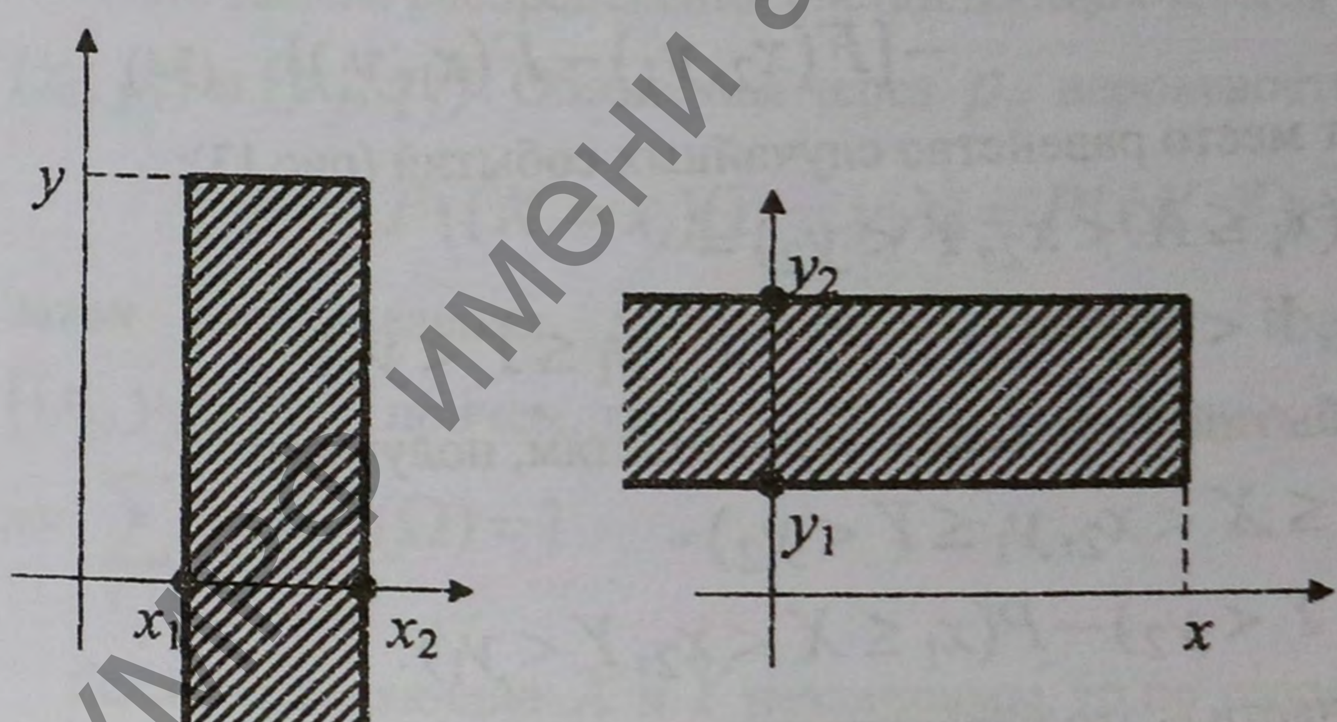

Рис.11.

Доказательство. Докажем, например, первое равенство. Событие

$$(X<x_2,Y<y)=(X<x_1,Y<y)+(x_1\le X<x_2,Y<y)$$

— сумма попарно несовместных событий. Переходя к вероятностям, получаем:

$$P(X < x_2, Y < y) =$$
$$= P(X < x_1, Y < y) + P(x_1 \le X < x_2, Y < y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда следует нужное равенство. ■

6. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 12):

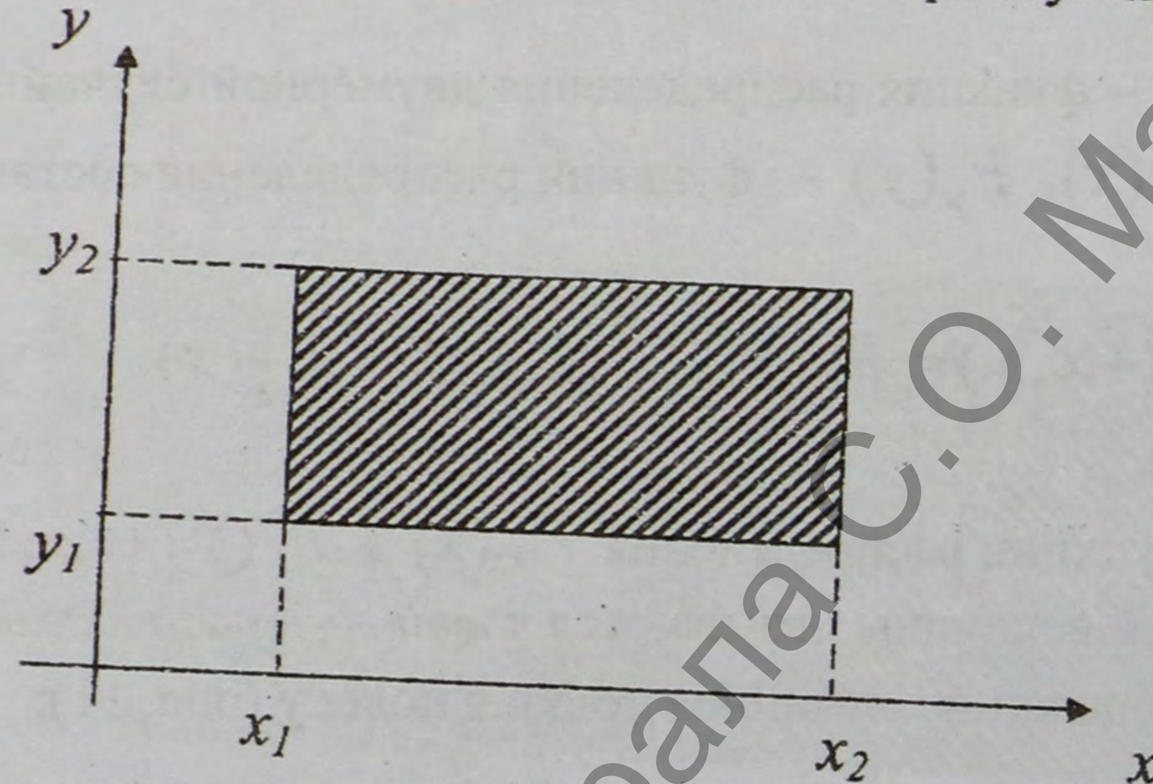

Рис.12.

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] -$$
$$-[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]. \quad (34)$$

Доказательство. Имеет место равенство случайных событий (рис.13):

$$(x_1 \le X < x_2, Y < y_2) =$$
$$= (x_1 \le X < x_2, Y < y_1) + (x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2)$$

— сумма несовместных событий. Переходя к вероятностям, получаем:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) =$$
$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y_2) - P(x_1 \le X < x_2, Y < y_1).$$

Обе вероятности в правой части – это вероятности попадания в соответствующие полосы. Применяя к ним формулу (32) при $y = y_2$ и $y = y_1$ соответственно, получаем требуемое равенство (34). ■

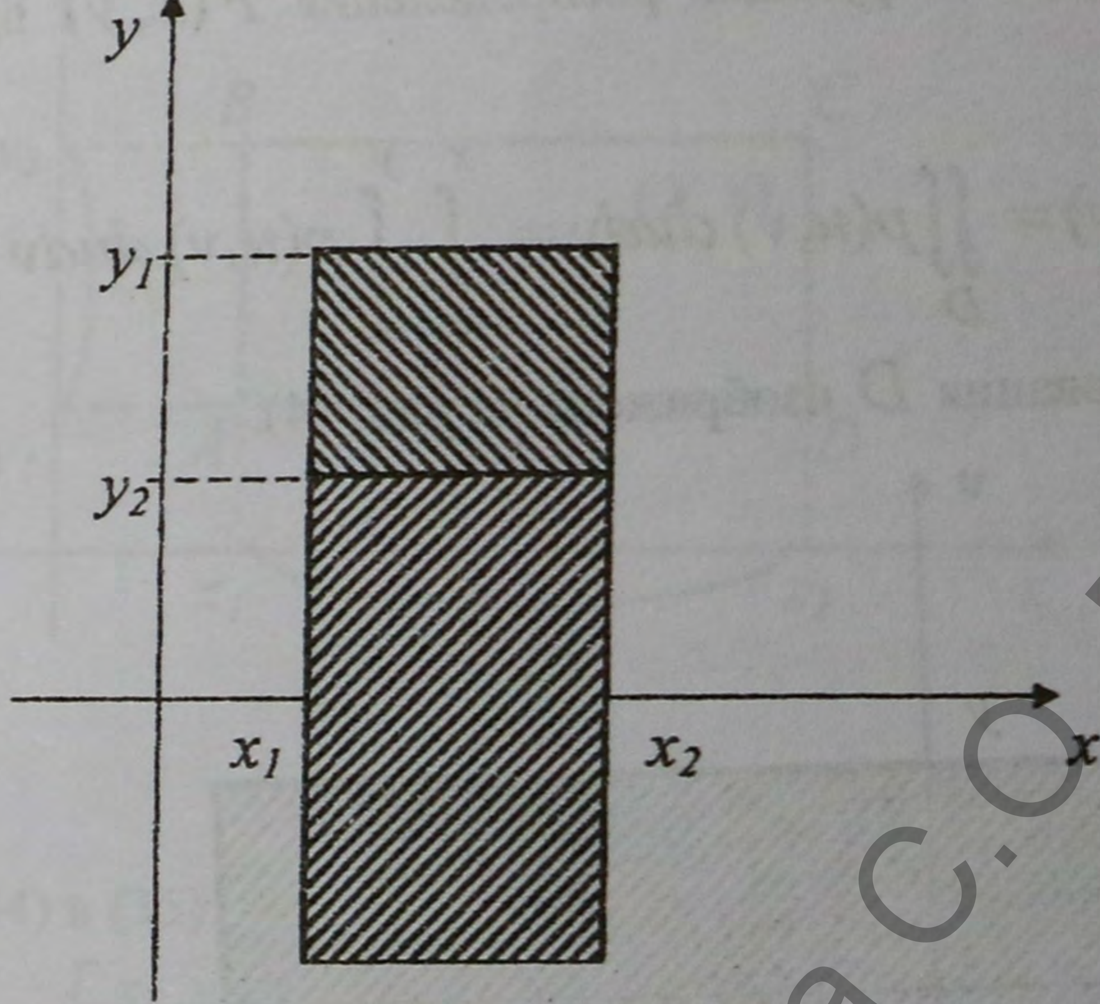

Рис.13.

4.2. Дискретные двумерные случайные величины

Определение. Двумерная случайная величина (X,Y) называется *дискретной*, если дискретными являются обе ее составляющих X и Y.

Пусть законы распределения составляющих имеют вид: $(x_i;\, p_i)$ и $(y_j;\, q_j)$. Обозначим через p_{ij} вероятность:

$$p_{ij} = P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big) = P\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big).$$

Закон распределения двумерной случайной величины имеет вид $\big((x_i, y_j),\, p_{ij}\big)$, причем, как и в одномерном случае, выполняется равенство: $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = P(\Omega) = 1.$

Если составляющие X и Y <u>независимы</u>, то по теореме умножения:

$$p_{ij} = P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j.$$

4.3. Непрерывные двумерные случайные величины

Определение. Двумерная случайная величина (X,Y) называется *непрерывной*, если существует неотрицательная интегрируемая в R^2 функция $p(x,y)$ такая, что функция распределения $F(x,y)$ представима в виде:

$$F(x,y)=\iint\limits_D p(u,v)\,dudv=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}p(u,v)\,dudv \tag{35}$$

(область интегрирования D изображена на рис. 14).

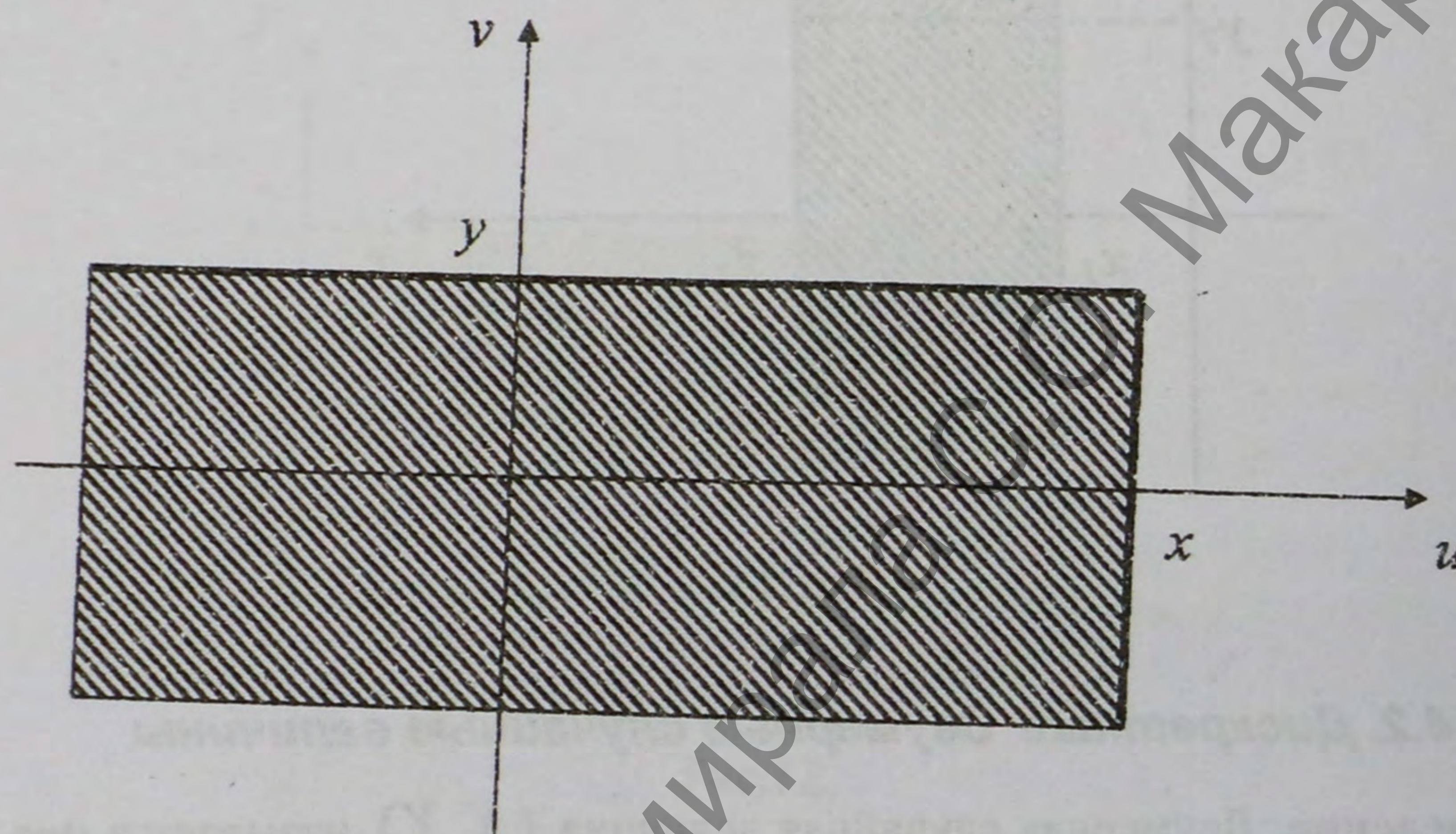

Рис. 14.

Функция $p(x,y)$ называется *плотностью распределения*.

Замечание. Для двойного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}p(u,v)\,dudv$ с переменными верхними пределами справедлива теорема, аналогичная теореме о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом [12]:

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=p(x,y)}.$$

Вероятностный смысл плотности

Пусть двумерная случайная величина (X,Y) непрерывна и имеет непрерывную плотность $p(x,y)$. Обозначим через P_{ABCD} вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в прямоугольник $ABCD$ с площадью S_{ABCD} (рис. 15).

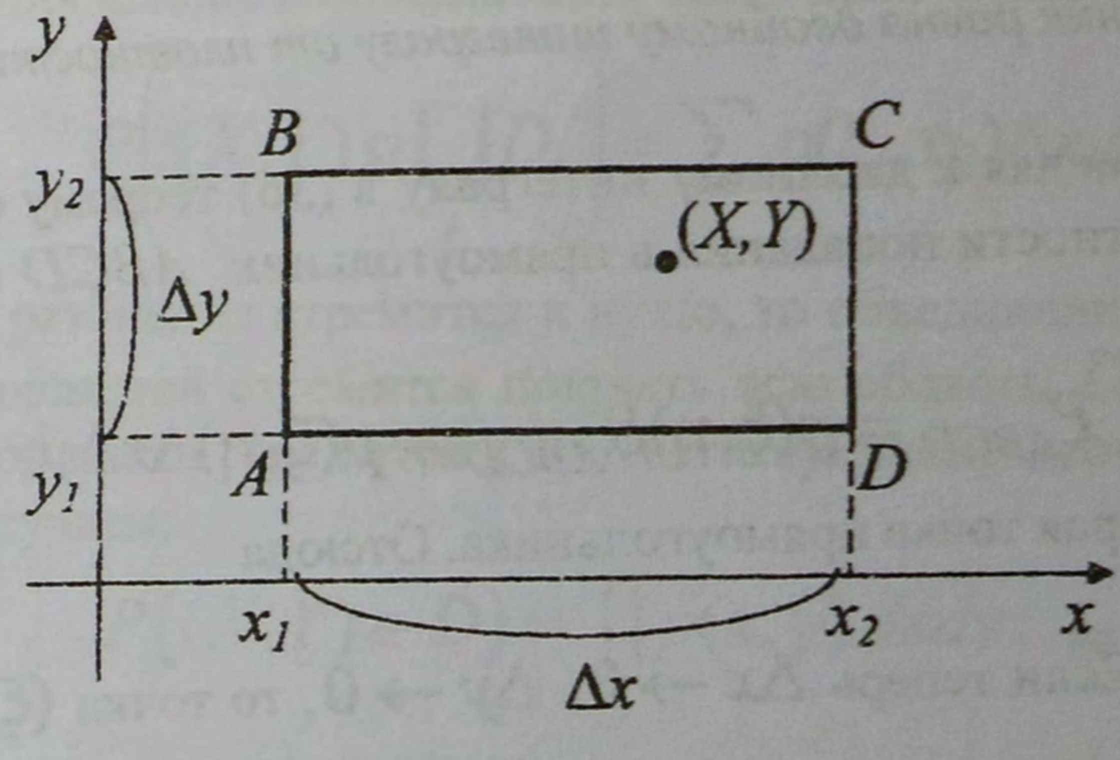

Рис. 15.

По формулам (34) и (35):

$$P_{ABCD} = \left[\int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_2} p(x,y)\, dxdy - \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y_2} p(x,y)\, dxdy \right] -$$

$$- \left[\int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_1} p(x,y)\, dxdy - \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{y_1} p(x,y)\, dxdy \right] =$$

(применим свойство аддитивности к внешнему интегралу)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_2} p(x,y)\, dxdy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{y_1} p(x,y)\, dxdy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^{y_2} p(x,y) dy - \int_{-\infty}^{y_1} p(x,y) dy \right] dx =$$

(применим свойство аддитивности к внутреннему интегралу)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x,y)\, dxdy .$$

Итак,

$$\boxed{P_{ABCD} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x,y)\, dxdy} . \qquad (36)$$

Вывод: *вероятность попадания непрерывно распределенной случайной* *точки в прямоугольник равна двойному интегралу от плотности по этому прямоугольнику.*

Следствие: Применяя к двойному интегралу в (36) теорему о среднем, получаем для вероятности попадания в прямоугольник $ABCD$ со сторонами $\Delta x,\ \Delta y > 0$:

$$P_{ABCD} = p(\xi,\eta)S_{ABCD} = p(\xi,\eta)\Delta x\Delta y, \qquad (37)$$

где (ξ,η) — некоторая точка прямоугольника. Отсюда

$p(\xi,\eta) = \dfrac{P_{ABCD}}{\Delta x\Delta y}$. Если теперь $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$, то точка (ξ,η) неограниченно приближается к точке (x,y), так что

$$\boxed{p(x,y) = \lim_{\Delta x,\,\Delta y \to 0}\frac{P_{ABCD}}{S_{ABCD}}}. \qquad (38)$$

Итак, *плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины при малых $\Delta x,\ \Delta y > 0$ приближенно равна отношению вероятности попадания в малый прямоугольник к площади этого прямоугольника.*

4.4. Вероятность попадания случайной точки в заданную область

Теорема. Пусть двумерная случайная величина (X,Y) непрерывна с плотностью $p(x,y)$, D — произвольная область плоскости Oxy. Тогда

$$\boxed{P\big((X,Y)\in D\big) = \iint_D p(x,y)\,dxdy}. \qquad (39)$$

Поясним теорему. Разобьем область D вертикальными и горизонтальными прямыми на непересекающиеся частичные области D_i (почти все они являются прямоугольниками).

По формуле (37) для этих прямоугольников:

$$P\big((X,Y)\in D_i\big) = p(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\Delta y_i,$$

откуда, суммируя по всем прямоугольникам:

$$\sum_i P\big((X,Y)\in D_i\big) = \sum_i p(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\Delta y_i.$$

В левой части последнего равенства — сумма вероятностей попарно несовместных событий. По аксиоме сложения, примененной «в обратном направлении», она равна вероятности суммы этих событий; эта сумма событий означает попадание в объединение частичных областей:

$$P\left((X,Y)\in\bigcup_i D_i\right)=\sum_i p(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\Delta y_i\,.$$

Если ранг разбиения стремится к нулю, то объединение частичных прямоугольных областей стремится покрыть всю область D, а интегральная сумма в правой части стремится к соответствующему двойному интегралу. В пределе получаем:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D p(x,y)\,dxdy\,. \quad \blacksquare$$

4.5. Свойства плотности непрерывной двумерной случайной величины

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dxdy=1$

Доказательство. Беря в формуле (39) в качестве области D всю плоскость Oxy, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dxdy=P(\Omega)=1. \quad \blacksquare$$

2. Составляющие X и Y непрерывной случайной величины (X,Y) также являются непрерывными случайными величинами, и для их плотностей справедливы формулы:

$$P_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy\,,\quad P_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,.$$

Доказательство. Проведем доказательство для составляющей X. По свойству 4 функции распределения (п. 4.1) имеем:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} p_X(x)\,dx\,,$$

где $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy$, так что составляющая X непрерывна, и ее плотностью является функция $p_X(x)$. ■

4.6. Условные законы распределения составляющих

I. Случай дискретной двумерной случайной величины.

Пусть для дискретной двумерной случайной величины (X,Y) законы распределения составляющих X и Y имеют вид: $(x_i; p_i)$ и $(y_j; q_j)$. Обозначим, как и выше, через p_{ij} вероятность:

$$p_{ij} = P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big) = P\big((X,Y) = (x_i, y_j)\big).$$

Зафиксируем событие $(Y = y_j)$. Если составляющие не предполагаются независимыми, то тогда зависимы события $A = (X = x_i)$ и $B = (Y = y_j)$, и можно говорить об условной вероятности:

$$P_B(A) = P(X = x_i | Y = y_j) =$$

$$= \frac{P\big((X = x_i)(Y = y_j)\big)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}. \qquad (40)$$

Определение. *Условным законом распределения составляющей* X *при* $Y = y_j$ называется таблица

$X\|Y = y_j:$	…	x_i	…
$P:$	…	$\dfrac{p_{ij}}{q_j}$	…

Аналогично для фиксированного события $(X = x_i)$ *условным законом распределения составляющей* Y *при* $X = x_i$ называется таблица

$Y\|X = x_i:$	…	y_j	…
$P:$	…	$\dfrac{p_{ij}}{p_i}$	…

Замечание. Если составляющие X и Y независимы, то по теореме умножения:

$$p_{ij} = p_i q_j \Rightarrow \frac{p_{ij}}{q_j} = p_i, \quad \frac{p_{ij}}{p_i} = q_j,$$

и условные законы распределения составляющих совпадают с безусловными.

II. Случай непрерывной двумерной случайной величины.

Пусть непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения $p(x, y)$, а плотности распределения составляющих – функции $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ – не принимают нулевых значений. Обобщая формулу (40) на непрерывный случай, получаем следующее

Определение. *Условной плотностью распределения составляющей* X при условии $Y = y$ называется функция $\varphi(x|y)$ аргумента x:

$$\varphi(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}.$$

Аналогично *условной плотностью распределения составляющей* Y при условии $X = x$ называется функция $\psi(y|x)$ аргумента y:

$$\psi(y/x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}.$$

4.7. Критерии независимости составляющих

Напомним, что случайные величины X и Y независимы, если для любых промежутков $< a, b >$ и $< c, d >$ являются независимыми события $(X \in < a, b >)$ и $(Y \in < c, d >)$, так что вероятность их произведения равна произведению соответствующих вероятностей:

$$P\big((X \in < a, b >)(Y \in < c, d >)\big) =$$
$$= P(X \in < a, b >)P(Y \in < c, d >).$$

Теорема. Для того чтобы составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) были независимы, необходимо и достаточно, чтобы ее функция распределения $F(x, y)$ была равна произведению функций распределения составляющих:

$$\boxed{F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)}. \tag{41}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть составляющие X и Y независимы. Тогда

$$F(x,y) = P((X < x)(Y < y)) = P(X < x)P(Y < y) =$$
$$= F_X(x)F_Y(y).$$

2. Не приводя исчерпывающего доказательства, дадим пояснения, относящиеся к достаточности. Пусть $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. По определению функции распределения в двумерном и одномерном случае, это означает, что

$$P\big((X < x)(Y < y)\big) = P(X < x)P(Y < y),$$

то есть события $(X < x)$ и $(Y < y)$ независимы. Можно доказать, что тогда и для любых промежутков $< a,b >$ и $< c,d >$ события $(X \in < a,b >)$ и $(Y \in < c,d >)$ также независимы. Последнее и означает независимость случайных величин X и Y. ■

Следствие. Для того чтобы составляющие X и Y непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) были независимы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство для плотностей:

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть составляющие X и Y независимы. Тогда справедливо равенство (41). Дифференцируя его дважды по x и по y, получаем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_x(x)F'_y(y), \text{ или } p(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

2. Достаточность. Пусть $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$. Интегрируя это равенство по множеству

$$D = \{(u,v) / -\infty < u < x;\ -\infty < v < y\}:$$

(см. рис. 14), получаем:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_X(u)p_Y(y)\,dxdy =$$

(выносим за знак внутреннего интеграла множители, не зависящие от y)

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \left(p_X(u)\,du \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} p_Y(v)\,dv \right) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} p_Y(v)\,dv.$$

Применяя к левой части формулу (35), а к правой — определение функции распределения в одномерном случае (п. 2.1), получаем: $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2001. — 575 с..

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2002. — 478 с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979. — 400 с.

4. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: УРСС, 2003. — 205 с.

5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001. — 318 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. М.: Высшая школа, 1997. — 416 с.

7. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1982. — 256 с.

8. Шкадова А.Р., Нырков А.П. Теория вероятностей. СПб.: СПГУВК, 2003. — 198 с.

9. Ястребов М.Ю. Схема равновозможных исходов. СПб.: СПГУВК. 1994. — 13 с.

10. Ястребов М.Ю. Производная и исследование функций. СПб.: СПГУВК. 2003. — 45 с.

11. Ястребов М.Ю. Введение в математическую логику. СПб.: СПГУВК, 2003. — 71 с.

12. Ястребов М.Ю. Математика. Неопределенный и определенный интегралы. СПб.: СПГУВК. 2004. — 55 с.

13. Ястребов М.Ю. Математика. Теория вероятностей. Часть I. Вероятности случайных событий. СПб.: СПГУВК, 2004. — 43 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ястребов Михаил Юрьевич

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧАСТЬ II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Дополнительный тираж 100 экз.
Отпечатано 19.12.08 г.

Дополнительный тираж 100 экз.
Отпечатано 26.09.08 г.

Дополнительный тираж 200 экз.
Отпечатано 13.12.12 г.

Дополнительный тираж 300 экз.
Отпечатано 15.11.07 г.

Дополнительный тираж 300 экз.
Отпечатано 24.02.09 г.

Дополнительный тираж 300 экз.
Отпечатано 09.03.06 г.

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.05.05. Сдано в производство 26.05.05.
Лицензия № 000283 от 19.10.98. Формат 60x84 1/16 Усл.-печ. л. 3,79.
Уч.-изд.л. 4,56. Тираж 200 экз. Заказ № 194

Отпечатано в типографии Ф ГОУ ВПО СПГУВК
198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2