ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНЫХ КОММУНИКАЦИЙ»

**М. Ю. Ястребов**

# МАТЕМАТИКА

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
Санкт-Петербургского государственного университета водных
коммуникаций*

Санкт-Петербург
2010

УДК 519.1
ББК 22.1

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент *А. Р. Шкадова*

**Ястребов М. Ю.**

**Математика. Элементы теории графов**: учебно-методическое пособие для подготовки к тестированию. — СПб.: СПГУВК, 2010. — 15 с.

Предназначено для студентов первого и второго курса технических и информационных специальностей.

Содержание соответствует рабочей программе дисциплины «Математика» и может быть использовано как при подготовке к тестированию, так и для текущих учебных занятий.

**УДК 519.1**
**ББК 22.1**

## 1. ПОНЯТИЕ ГРАФА

В теории графов рассматриваются конфигурации из точек (**вершин**) и линий (**ребер**), соединяющих некоторые из этих точек.

**Графом** с множеством вершин **V** называется некоторая совокупность $\mathrm{P}$ пар вершин вида $(A,B)$, где $A,B \in$ **V**. Пара $(A,B)$ соответствует ребру, идущему из вершины $A$ в вершину $B$.

Если порядок вершин является существенным, то есть ребра $(A,B)$ и $(B,A)$ необходимо различать, то граф называется **ориентированным** и соответствующие ребра изображаются линиями со стрелками. В этом случае вершина $A$, стоящая в паре $(A,B)$ на первом месте, называется **начальной**, а другая вершина $B$ — **конечной**. В этом случае ребро $(A,B)$ характеризуют как **исходящее** из вершины $A$ и **входящее** в вершину $B$.

Например, ориентированным графом может выражаться отношение потребления одними заводами продукции других заводов.

**Пример.** На рис. 1 изображены ориентированные графы с тремя, четырьмя и шестью вершинами.

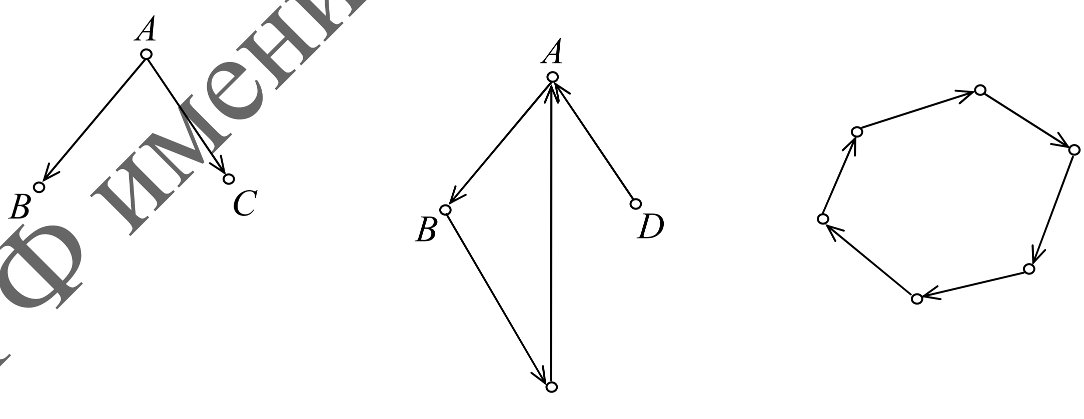


Рис. 1

Если порядок упоминания вершин любого ребра $(A,B)$ несущественен, то граф называется **неориентированным.**

Например, неориентированным графом может выражаться отношение знакомства друг с другом некоторых студентов из числа собравшихся в аудитории. В этом случае неориентированные ребра графа изображаются линиями без указания направления, то есть без стрелок.

**Пример.** На рис. 2 изображены неориентированные графы с четырьмя, пятью и семью вершинами.

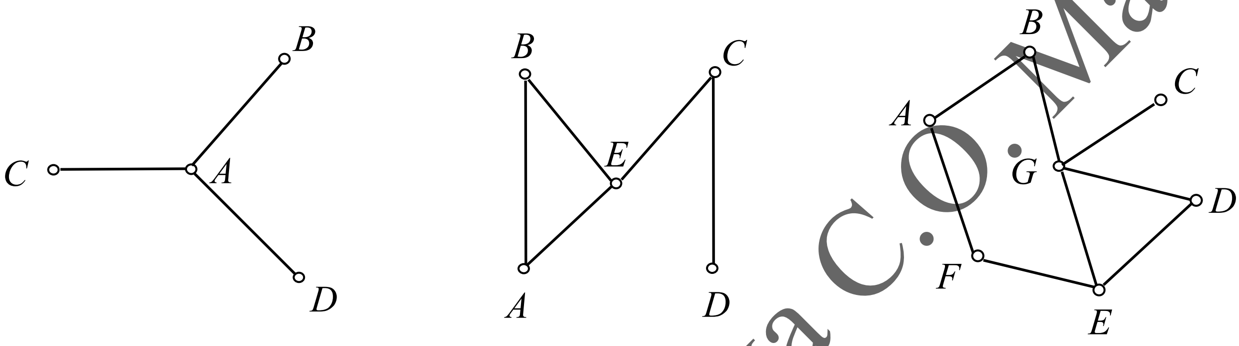


Рис. 2

Среди ребер графа могут встречаться **петли** вида $(A, A)$, соединяющие вершину $A$ с нею же самой. На рис. 3 изображен ориентированный граф с петлями в вершинах $B$ и $D$.

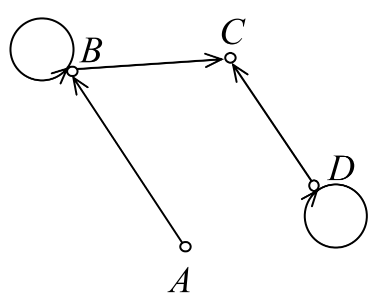


Рис. 3

**Матрицей смежности ориентированного графа** с множеством вершин $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ называется квадратная матрица $S = (s_{ij})$ размера $n \times n$, состоящая из нулей и единиц. При этом $s_{ij} = 1$, если граф содержит ребро, исходящее из вершины $A_i$ и входящее в вершину $A_j$; если такого ребра нет, то $s_{ij} = 0$.

**Примеры. 1.** Матрица смежности ориентированного графа, изображенного на рис. 4, имеет вид

| | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 1 | 1 | 0 |
| *B* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *C* | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *D* | 1 | 0 | 0 | 0 |

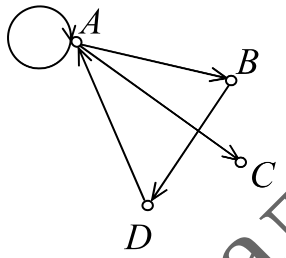


Рис. 4

**2.** Ориентированный граф, заданный матрицей смежности

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *B* | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| *C* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *D* | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *E* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

имеет вид, изображенный на рис. 5.

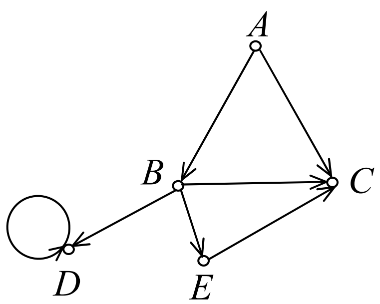


Рис. 5

Аналогично **матрицей смежности неориентированного графа** с множеством вершин $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется матрица $S = (s_{ij})$, состоящая из нулей и единиц. При этом $s_{ij} = s_{ji} = 1$, если граф содержит ребро, соединяющее вершины $A_i$ и $A_j$; если такого ребра нет, то $s_{ij} = s_{ji} = 0$.

Таким образом, матрица смежности неориентированного графа является симметрической (элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, совпадают).

**Примеры. 1.** Матрица смежности неориентированного графа, изображенного на рис. 6, имеет вид

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | *K* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *B* | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *C* | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *D* | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *E* | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *F* | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *G* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *H* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| *K* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

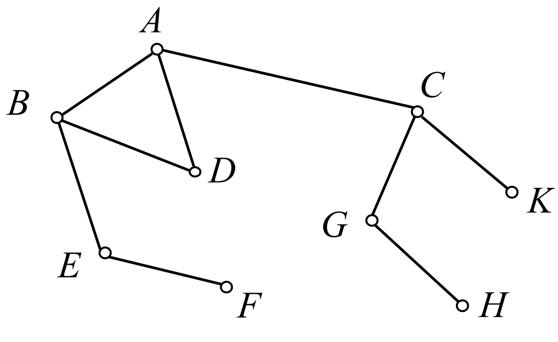


Рис. 6

**2.** Неориентированный граф, заданный матрицей смежности

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $B$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $C$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $D$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $E$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

имеет вид, изображенный на рис. 7.

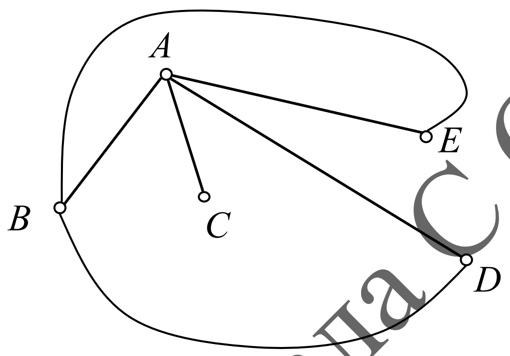


Рис. 7

**Путем** в ориентированном графе называется такая последовательность *двух или более* ребер

$$[(A,B),(B,C),(C,D),\dots,(E,F),(F,G)],$$

в которой каждое из этих ребер встречается только один раз, и начальная точка каждого следующего ребра является конечной точкой предыдущего. Здесь вершина $A$ является **начальной**, а вершина $G$ — **конечной**.

**Пример.** Граф, изображенный на рис. 8, содержит, в частности, путь из двух ребер

$$[(A,B),(B,C)],$$

путь из трех ребер

$$[(A,B),(B,D),(D,E)]$$

и путь из четырех ребер

$$[(A,B),(B,D),(D,E),(E,F)].$$

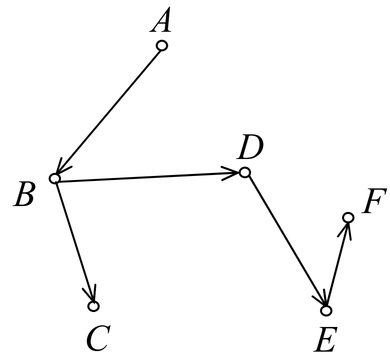


Рис. 8

Путь в ориентированном графе называется **контуром**, если он является замкнутым, то есть начальная и конечная вершины совпадают: $[(A,B),\ldots,(K,A)]$.

**Пример.** Граф, изображенный на рис. 9, содержит контуры

$$[(A,B),(B,C),(C,D),(D,A)]$$

и

$$[(D,E),(E,F),(F,D)].$$

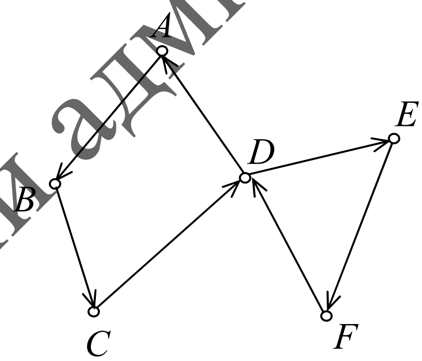


Рис. 9

Если в ориентированном графе выделены начальная вершина $O$, которая не является конечной ни для одного ребра, и конечная вершина $K$, которая не является начальной ни для одного ребра, то всякий путь с начальной вершиной $O$ и конечной $K$ называется **полным**.

Матрица смежности графа указанного типа имеет строку из нулей для вершины $O$ и столбец из нулей для вершины $K$.

**Пример.** Граф на рис. 10 содержит полные пути

$$[(O,A),(A,E),(E,K)],$$

$$[(O,B),(B,K)]$$

и

$$[(O,C),(C,D),(D,K)].$$

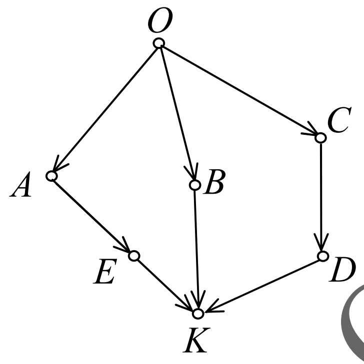


Рис. 10



## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Построить ориентированные графы, представленные матрицами смежности (а), (б), (в) и найти количество полных путей в них:

**(а)**

| | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 0 | 0 | 1 |
| *B* | 0 | 0 | 1 | 1 |
| *C* | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *D* | 0 | 1 | 0 | 0 |

**(б)**

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *B* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *C* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *D* | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *E* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**(в)**

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $C$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $D$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $E$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**2.** Какие из графов, представленных матрицами смежности **(а)**, **(б)** и **(в)**, и в каких вершинах содержат петли?

**(а)**

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $B$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $C$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $D$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

**(б)**

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $C$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $D$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $E$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**(в)**

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $B$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $C$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $D$ | 0 | 1 | 0 | 0 |

**3.** Какой вид может иметь полный путь в ориентированном графе, изображенном на рис. 11:

**(а)** $O \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$;
**(б)** $3 \to 4$;
**(в)** $O \to 1 \to 4$;
**(г)** $O \to 3 \to 4$.

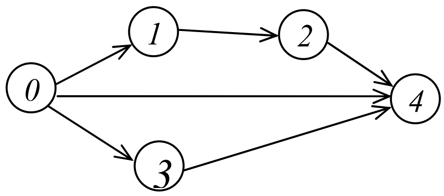


Рис. 11

**4.** Для ориентированного графа, изображенного на рис. 12 полный путь может иметь вид (выбрать правильные варианты):

**(а)** $3 \to 4$;
**(б)** $O \to 1 \to 3$;
**(в)** $O \to 2 \to 3 \to 4$;
**(г)** $O \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$.

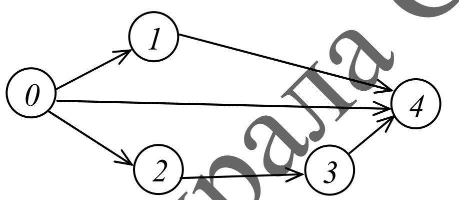


Рис. 12

**5.** Перечислить полные пути ориентированного графа, изображенного на рис. 13. Записать его матрицу смежности.

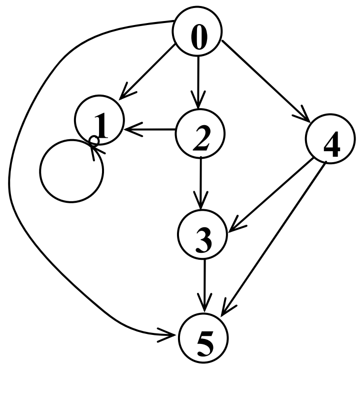


Рис. 13

## РЕШЕНИЯ

**1.** Для построения графа с $n$ вершинами по его матрице смежности нужно расставить на плоскости $n$ точек, которые соответствуют вершинам графа (перечисленным в левом столбце), и для каждой вершины с номером $i$, двигаясь по $i$-й строке, провести ребра ко всем вершинам, у которых $s_{ij} = 1$.

**(а)** Граф изображен на рис. 14. Один полный путь $A \to D \to B \to C$.

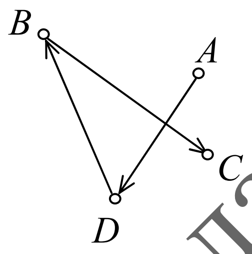


Рис. 14

**(б)** Граф изображен на рис. 15. Полных путей нет.

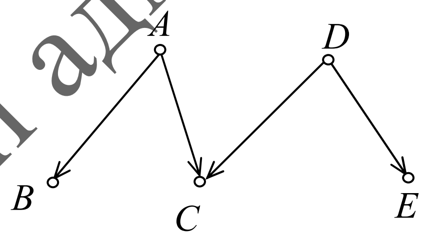


Рис. 15

**(в)** Граф изображен на рис. 16. Три полных пути:

$A \to B \to E \to F$;
$A \to C \to E \to F$;
$A \to D \to E \to F$.

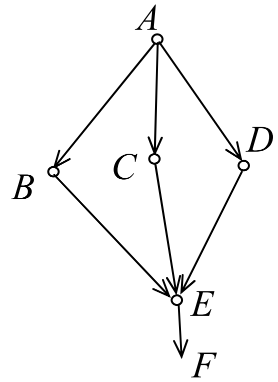


Рис. 16

**2.** Петля характеризуется равенством единице соответствующего элемента главной диагонали матрицы смежности.

**(а)** Граф содержит петли в вершинах *A* и *D*.

**(б)** Граф содержит петли в вершинах *B* и *C* и *E* .

**(в)** Петли отсутствуют.

**3.** Полный путь $O \to 3 \to 4$.

**4.** Полный путь $O \to 2 \to 3 \to 4$.

**5.** Полные пути:

$O \to 2 \to 3 \to 5$;

$O \to 4 \to 3 \to 5$;

$O \to 4 \to 5$

Матрица смежности имеет вид:

| | ***0*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0*** | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| ***1*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ***2*** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| ***3*** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ***4*** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| ***5*** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К. Теория графов и ее приложения. М.: ИЛ, 1962. С.320.
2. Оре О. Теория графов.— 2-е изд. — М.: Наука, 1980. С.336.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. — М.: «Вузовская книга», 2004. С.664.
4. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. М.: Физматлит, 2007. С.168.

Учебное издание

**Ястребов** *Михаил Юрьевич*

# МАТЕМАТИКА

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

*Учебно-методическое пособие для подготовки к тестированию*



Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 09.12.10 Сдано в производство 09.12.10
Формат 60×84 1/16 Усл.-печ. л. 0,87. Уч.-изд. л. 0,75.
Тираж 66 экз. Заказ № 175

**Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций**
**198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7**

**Отпечатано в типографии ФГОУ ВПО СПГУВК**
**198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2**